

De poolplanimeter van Jakob Amsler-Laffon

Simon van der Salm

Inleiding

In 1854 construeerde de Zwitserse mathematisch fysicus *Jakob Amsler-Laffon* (1779 – 1869), zie de foto in fig. 1, een poolplanimeter waarmee *exact* de oppervlakte A_R van een willekeurig gevormd gebied R in een vlak kan worden gemeten, louter door het aftasten van de *contour* C die dat gebied insluit¹. Zie [1].



Fig. 1. Jakob Amsler(-Laffon). Zie biografie [2].

De website van John Vossepoel [3] toont een aantal fraaie foto's van varianten van de poolplanimeter. Fig. 2 toont mijn eigen Amsler-poolplanimeter van Ott, zo'n 100 jaar jonger dan die van Amsler, maar werkend volgens hetzelfde door hem gevonden principe.

De grote natuurkundige *Maxwell*, zie [4, blz. 20], die in ongeveer dezelfde tijd ook een planimeter ontwierp, staarde verbluft naar de poolplanimeter van Amsler. Hij heeft zich ongetwijfeld afgevraagd wat iedereen zich afvraagt die voor het eerst een poolplanimeter ziet: Hoe kan een zo eenvoudige

instrument als de poolplanimeter *exact* de oppervlakte A_R van willekeurig gevormde vlakke figuren meten? Op grond van welk wiskundig principe bepaalt een willekeurige, gesloten contour C de oppervlakte van het ingesloten gebied R ? Hoe simpel de constructie van een poolplanimeter ook is, voor het beantwoorden van die vragen is een tamelijk complexe wiskundige analyse nodig.

Fig. 2. Poolplanimeter, type 31, nr. 89475, geproduceerd door A. Ott, Kempten, Bayern, op de Nederlandse markt gebracht door N.V. Wed. J. Ahrend & Zoon. Eigendom van de auteur.

In dit artikel analyseren we de wiskundige werking van de poolplanimeter van Amsler. Wie op internet de verklaring zoekt van de werking van de poolplanimeter, vindt veelal de elegante verklaring door middel van de *stelling van Green voor het*



¹ Dat men de oppervlakte van een gebied kan bepalen, louter door het aftasten van de contour er van, was in de tijd van Amsler al bekend. Amsler verwijst in zijn artikel [1] van 1856 o.a. naar Johannes Oppikofer (1783 – 1864), die in 1827 een kegelplanimeter construeerde die de oppervlakte bepaalt door het aftasten van de contour. Amsler vermeldt dat dat idee zelfs al ouder was, en door de Duitse landmeter Johann Martin Hermann (1785 – 1841) in 1814 werd gevonden, maar dat dat idee in de vergetelheid raakte. Barbera Haerberlin heeft een fraaie, digitale simulatie van de constructie en de werking van Hermann's kegelplanimeter gemaakt, die te zien is op internet: <https://www.youtube.com/watch?v=XQXO6edF6sA>. In 2014 was er een tentoonstelling over het werk van Hermann in het Deutsches Museum, in München. Referentie [15] beschrijft in de eerste plaats de geschiedenis van Hermann en zijn kegelplanimeter, maar plaatst die geschiedenis in de grotere context van de historische ontwikkeling van allerlei typen planimeters die na 1814 werden bedacht en geconstrueerd.

vlak, die ook in dit artikel aan de orde komt. Maar Amsler kende die stelling helemaal niet. Hij baseerde de werking van zijn poolplanimeter op een geheel ander, *intuïtief* idee dan op het vectoriële rotatieprincipe van de stelling van Green. Om inzicht te krijgen in dat geniale idee van Amsler bespreken we eerst een *klassieke* beschrijving (waarvan veel varianten bestaan), die gebruik maakt van een combinatiebeweging van een *translatie* en een *rotatie* van een lijnstuk, en de conclusie die we kunnen trekken uit de verbazingwekkend eenvoudige formule waarmee die verklaring eindigt.

Constructie van de poolplanimeter

Figuren 3a, 3b en 3c tonen de constructietekeningen die Amsler in 1856 publiceerde in zijn artikel [1] over de zojuist ontworpen poolplanimeter.

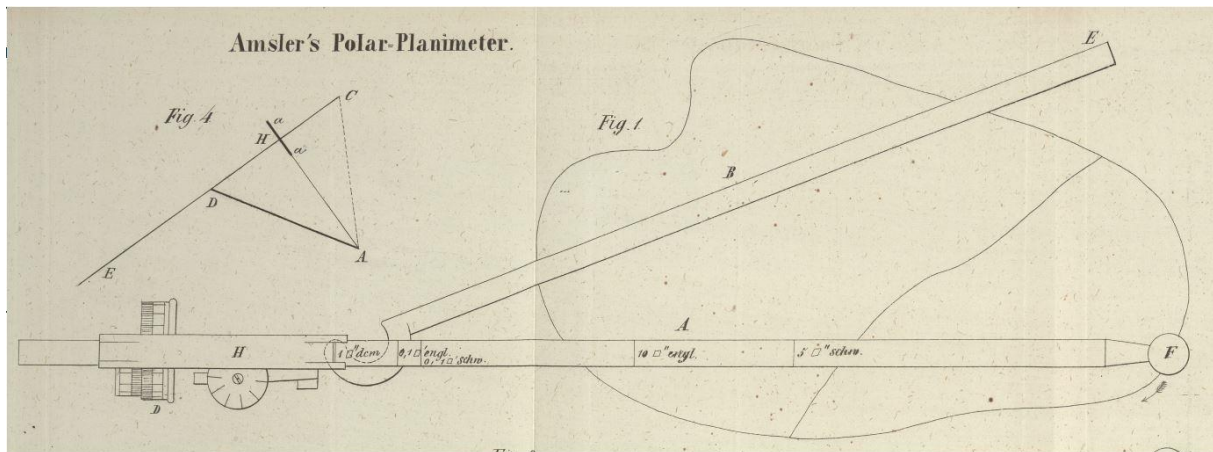


Fig. 3a. Figuren 3a.1 en 3a.4, met tastarm A, poolarm B en, pool E en tastpunt F, waarnaar [1] verwijst.

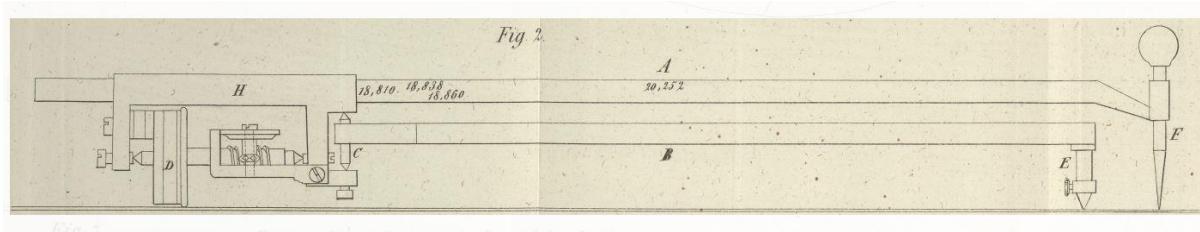


Fig. 3b. Figuur 3b.2, met zijaanzicht van de poolplanimeter, waarnaar [1] verwijst. Hierin ziet men het meetwielje D, met overbrenging op een horizontaal wijzerplaatje, met noniusschaal, alsmede de spil C.

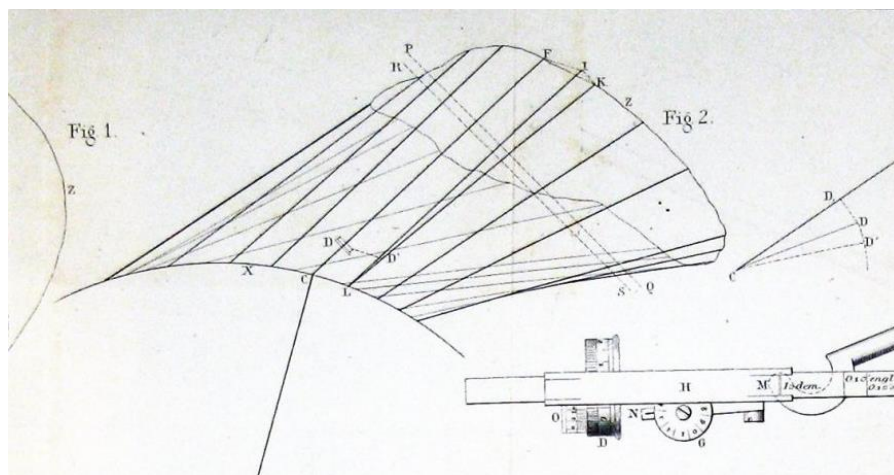


Fig. 4. Verklarend detail fig. 4.2 uit een constructietekening van de hand van Amsler. Zie de rotatie bij L en loodrechte translatie van D naar D'. Zie de website van de American Mathematical Society [5].

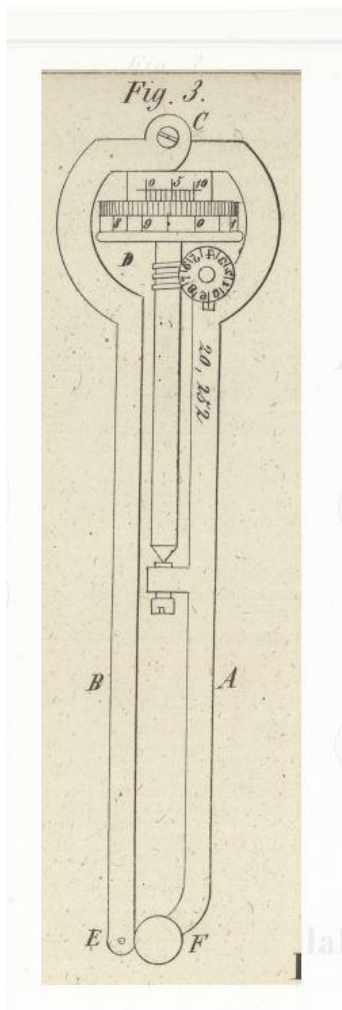


Fig. 3c. Figuur 3c.3 toont het bovenaanzicht van de poolplanimeter, met meetwielje D en wijzerplaatje, waarop de totale hoekverdraaiing is af te lezen, waarnaar [1] verwijst.

Fig. 4 toont details van een andere tekening van Amsler, waarin in het bijzonder de daarin vermelde fig. 4.2 van belang is voor het begrijpen van de hierna volgende wiskundige beschrijving van de poolplanimeter.

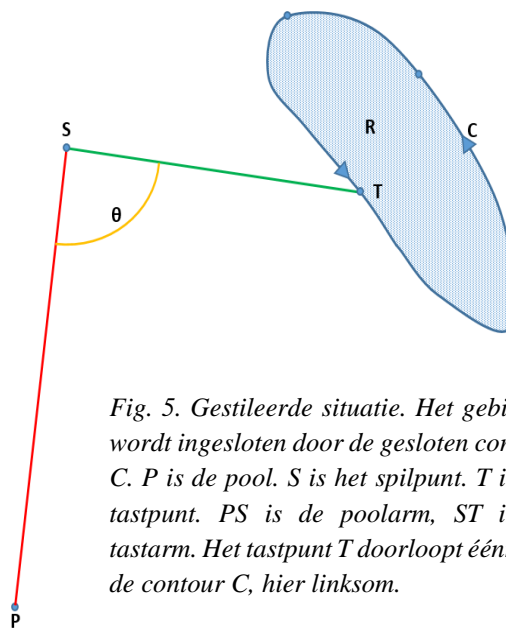


Fig. 5. Gestileerde situatie. Het gebied R wordt ingesloten door de gesloten contour C. P is de pool. S is het spilpunt. T is het tastpunt. PS is de poolarm, ST is de tastarm. Het tastpunt T doorloopt éénmaal de contour C, hier linksom.

Fig. 5 toont een vereenvoudigde, momentane situatieschets van de poolplanimeter tijdens het aftasten van de contour C van het gebied R, met de meest relevante onderdelen, maar zonder het meetwielje W. Punt P is de pool, een tijdens de meting gefixeerd referentiepunt dat gewoonlijk, maar niet noodzakelijk, buiten het gebied R wordt gekozen.

Met behulp van fig. 5 kan men nu gemakkelijk in de figuren 3a, 3b en 3c van Amsler de diverse onderdelen herkennen. In die figuren is A de tastarm ST, B de poolarm PS, C de spil S, D het meetwielje W, E de pool P en F het tastpunt T.

De contour C van het gebied R wordt afgetast door het tastpunt T van een geknikt armstelsel PST, bestaande uit de poolarm PS (rood) en de tastarm ST (groen), met $ST \leq PS$. Poolarm PS kan draaien rond de pool P, de tastarm ST kan draaien rond het spilpunt S. De pool P wordt bij voorkeur zodanig gekozen dat de hoek θ tussen PS en ST (zie fig. 5) niet te veel van 90° afwijkt. Men zorgt er in elk geval voor dat θ steeds kleiner is dan 180° , zodat de tastarm ST niet in het verlengde van de poolarm PS kan komen te liggen. Belangrijk is zich te realiseren dat, tijdens het aftasten van de contour C, zowel de poolarm PS als de tastarm ST daardoor geen volledige cirkel doorlopen. Hoek θ_{eind} is dus na het aftasten van C gelijk aan θ_{begin} bij het begin van het aftasten.

Daarnaast moet de pool P zodanig geplaatst worden dat elk punt van de contour C door het tastpunt T kan worden bereikt, zodat het gebied R steeds binnen een cirkelvormige ring met binnenstraal $PS - ST$ en buitenstraal $PS + ST$ ligt.

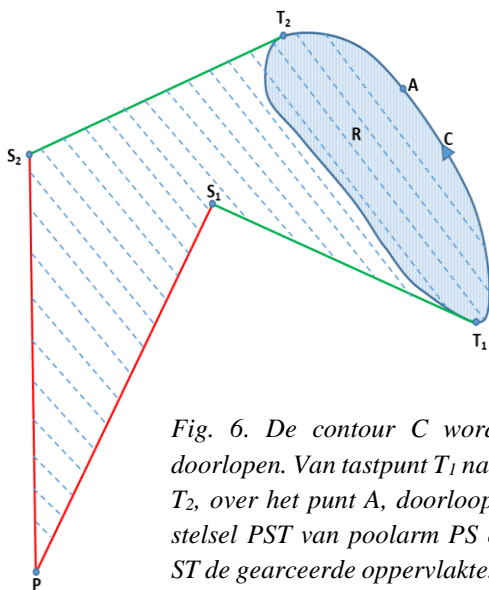


Fig. 6. De contour C wordt linksom doorlopen. Van tastpunt T_1 naar tastpunt T_2 , over het punt A , doorloopt het armstelsel PST van poolarm PS en tastarm ST de gearceerde oppervlakte. Het meetwiel W meet, op een schaalfactor na, deze oppervlakte.

in essentie [6, blz. 236 - 239] uit dat schoolboek.

Fig. 6 toont de situatie waarbij het tastpunt T de contour C doorloopt. Eerst beweegt T over de rechterkant van C , via het punt A , van tastpunt T_1 naar tastpunt T_2 . Het geknikte armstelsel PST doorzwaait dan de in fig. 6 de van links boven naar rechts beneden gearceerde oppervlakte, die duidelijk aanzienlijk groter is dan de te bepalen oppervlakte A_R van het gebied R . Deze aanvankelijk te grote oppervlakte wordt gemeten door het meetwiel W , dat met een geel pijltje is aangeduid.

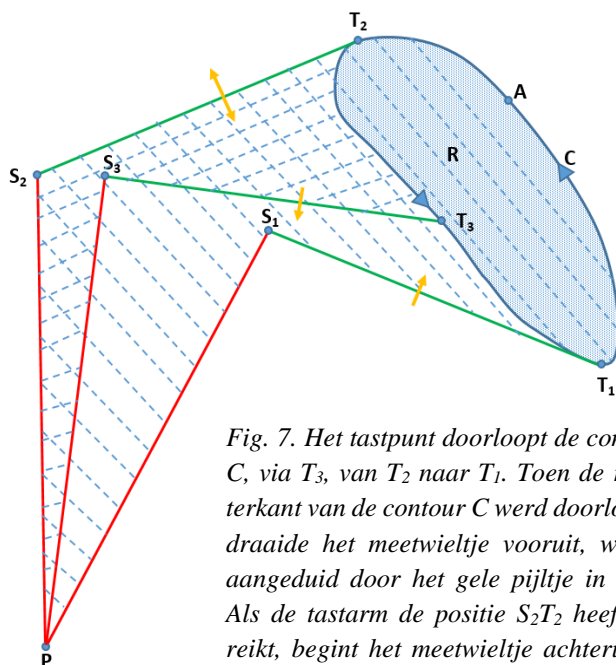


Fig. 7. Het tastpunt doorloopt de contour C , via T_3 , van T_2 naar T_1 . Toen de rechterkant van de contour C werd doorlopen, draaide het meetwiel vooruit, wat is aangeduid door het gele pijltje in S_1T_1 . Als de tastarm de positie S_2T_2 heeft bereikt, begint het meetwiel achteruit te draaien.

Op de tastarm ST is een *meetwiel* W zodanig aangebracht dat het, bij beweging van de tastarm ST , *uitsluitend*, vooruit of achteruit, in een vlak loodrecht op ST , kan roteren. In fig. 2 met de planimeter van Ott en in fig. 3b en fig. 4 met de originele planimeter van Amsler, zien we dat meetwiel W links van het spilpunt S , maar het meetwiel W zou overal op de tastarm ST kunnen worden gemonteerd. In fig. 5 is het meetwiel W niet getekend.

Het meetprincipe van de poolplanimeter

Dat de poolplanimeter van Amsler tot ongeveer 1980 een belangrijk instrument was, toont het bekende wiskundeboek [6] dat in de jaren zestig en zeventig in het eerste leerjaar van veel Hts'en werd gebruikt. Voor een eerste beantwoording van de vragen in de inleiding van dit artikel, volgen we

Tussen de momentane tastpunten T_1 en T_2 draait het meetwiel W *vooruit*, wat de gebruikelijke *positieve oriëntatie* in de wiskunde en natuurkunde is. Merkwaaarderwijs gaat Amsler uit van een negatieve oriëntatie, waarbij de contour C rechtsom wordt doorlopen. Voor het uiteindelijke resultaat, namelijk de waarde van de oppervlakte A_R van het gebied R , maakt dat natuurlijk geen wezenlijk verschil².

Zoals opgemerkt, als het tastpunt T de rechterkant van de contour C doorloopt, draait het meetwiel W vooruit. Zie het gele pijltje in de initiële stand S_1T_1 van de tastarm ST in fig. 7.

² Bij de poolplanimeter van Amsler wordt C rechtsom doorlopen, tegengesteld aan wat gebruikelijk is in de wiskunde. Voor het begrijpen van de planimeter is die richting niet van wezenlijk belang. We zullen hier echter uitgaan

Tijdens het doorlopen van de rechterkant van de contour C blijft het meetwiel tje vooruit draaien, waardoor W een toename van de door het armstelsel PST doorlopen oppervlakte meet. Als de tastarm ST de momentane positie S_2T_2 heeft bereikt, begint het meetwiel tje W achteruit te draaien, wat met een dubbel pijltje in de bovenste stand van de tastarm S_2T_2 , in fig. 7, is aangeduid.

Fig. 7 laat tevens de situatie zien op het moment dat de tastarm ST de momentane positie S_3T_3 heeft bereikt. Bij het aftasten van contour C van T_2 naar T_3 draait het meetwiel tje W achteruit, het armstelsel PST heeft de dubbel-gearceerde oppervlakte doorlopen, en deze oppervlakte is, door het achteruit draaien van het meetwiel tje W, in mindering gebracht op de eerder door het meetwiel tje W gemeten, te grote oppervlakte. Als de tastarm ST, na het volledig doorlopen van de contour C, weer de initiële positie S_1T_1 heeft bereikt, valt S_3 samen met S_1 en T_3 samen met T_1 . De daarbij dubbel-gearceerde oppervlakte van vlakdeel $PS_1T_1T_3T_2S_2$, is dan gelijk aan de oppervlakte die door W extra werd gerekend toen het tastpunt T de rechterkant (van T_1 , via punt A naar T_2) van de contour C doorliep. Het resultaat is dus dat het meetwiel tje W uiteindelijk, op een schaalfactor na, *exact* de oppervlakte A_R van R heeft bepaald.

Een belangrijke vraag die vervolgens opkomt, is: waarom meet het meetwiel tje W überhaupt de oppervlakte A_R (op een schaalfactor na)?

Het meten van de oppervlakte van R door het meetwiel tje W

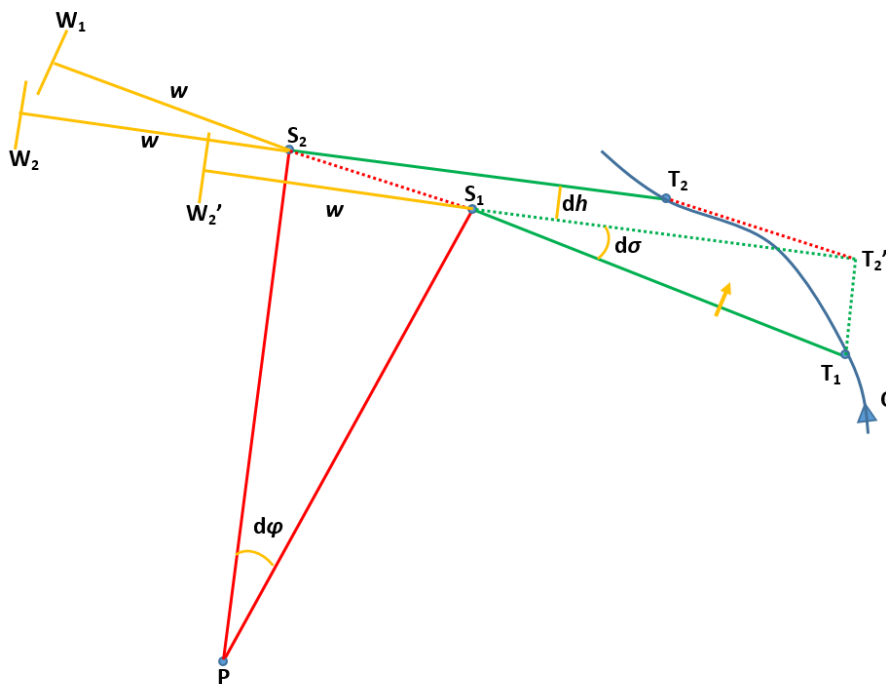


Fig. 8. Tijdens het aftasten van een infinitesimaal klein deel T_1T_2 van de contour C voert de tastarm ST twee bewegingen uit: een rotatie rond het spilpunt S_1 en een translatie over een afstand dh loodrecht op S_1T_1 . Het armstelsel van poolarm PS en tastarm ST doorloopt een oppervlakte die de som is van de oppervlakten van de sectoren PS_1S_2 , en $S_1T_1T_2'$, en van het parallelogram $S_1T_2'T_2S_2$. Het vlakdeel $T_1T_2'T_2$ wordt verwaarloosd. Zie ook fig. 4.2. van Amsler.

van de gebruikelijke wiskundig positieve richting linksom, vooral omdat de vector-analytische begrippen *circulatie* en *rotatie*, die op de achtergrond een rol spelen, uitgaan van die richting. De positieve richting linksom levert de positieve oriëntatie, die in de *rechtse schroefregel* of *rechterhandregel* van elektrotechnici tot uiting komt.

We vervolgen min of meer de redenering in het wiskundeschoolboek [6, blz. 236 - 239]. In fig. 8 doorloopt het tastpunt T een infinitesimaal klein deel van de rechterkant van de contour C, van T₁ naar T₂. Het spilpunt S verplaatst zich hierbij over een boog S₁S₂, die hier, omdat het een infinitesimaal kleine boog betreft, als recht lijnstuk getekend is. De straal van die boog is gelijk aan de poolarm PS.

We kunnen de beweging van T₁ naar T₂ opvatten als een *rotatie* van de tastarm ST rond het spilpunt S₁, gevolgd door een *translatie* van de tastarm ST over de afstand dh , *loodrecht* op ST. Er ontstaat daardoor een denkbeeldig *hulp-tastpunt* T₂', dat hier buiten de contour C ligt, maar er ook op of binnen kan liggen. De oppervlakte van vlakdeel PS₁T₁T₂S₂P, dat wil zeggen, de oppervlakte die door het armstelsel PST wordt doorzwaaid, is bij (lineaire) benadering gelijk aan de oppervlakte van de sector PS₁S₂, plus de oppervlakte van de sector S₁T₁T₂', plus de oppervlakte van het parallellogram S₁T₂'T₂S₂³. De oppervlakte van de sector PS₁S₂ is $\frac{1}{2}PS^2 d\varphi$; de oppervlakte van de sector S₁T₁T₂' is $\frac{1}{2}ST^2 d\sigma$; de oppervlakte van het parallellogram S₁T₂'T₂S₂ is $STdh$, zodat de oppervlakte van het infinitesimaal kleine vlakdeel PS₁T₁T₂S₂P bij (lineaire) benadering gelijk is aan:

$$dA_R \propto \frac{1}{2}PS^2 d\varphi + \frac{1}{2}ST^2 d\sigma + STdh \quad (1)$$

Net als bij de planimeter van Amsler is in fig. 8, links van het spilpunt S, op het verlengde van TS, een meetwielkje W aangebracht. De afstand van meetwielkje tot het spilpunt S noemen we w . Tijdens het aftasten van het stukje contour van T₁ naar T₂, kunnen we de beweging van het meetwielkje W opdelen in een beweging van W₁ naar W₂', met lengte $w \cdot (-d\sigma)$ gevolgd door een beweging van W₂' naar W₂, met lengte dh . Is r de straal van het meetwielkje W en α de door W doorlopen hoek, dan geldt dus:

$$r d\alpha = -w d\sigma + dh \quad (2)$$

Combineren van formules (1) en (2), en integreren, geeft:

$$A_R \propto \frac{1}{2}PS^2 \int d\varphi + \left(\frac{1}{2}ST^2 + wST \right) \int d\sigma + rST \int d\alpha \quad (3)$$

Omdat de poolarm PS geen volledige omwenteling maakt, is $\int d\varphi = 0$ (omdat $\varphi_{eind} = \varphi_{begin}$). Hetzelfde geldt voor de tastarm ST, dus $\int d\sigma = 0$ (omdat $\sigma_{eind} = \sigma_{begin}$), zodat men uitkomt op de verbluffend, eenvoudige formule:

$$A_R \propto rST\alpha \quad (4)$$

De oppervlakte A_R van het gebied R is dus inderdaad, in *lineaire benadering*, recht evenredig met de hoekverdraaiing α van het meetwielkje W. Een voor de hand liggend bezwaar is dat dit bewijs alle hogere orden (Taylor) verschillen buiten beschouwing laat!

³ Hier verschuilt zich de zwakte van deze verklaring uit [6] en veel soortgelijke varianten daarvan. Omdat we gebruik maken van differentiaal, die we hier opvatten als infinitesimaal kleine grootheden, worden allerlei functieverdringen lineair benaderd en gaan we er stilzwijgend vanuit dat tweede en hogere ordes van die verschillen verwaarloosbaar zijn ten opzichte van de eerste ordes van die verschillen (formule van Taylor!). Door die eenvoud van redenering gaan we er bijvoorbeeld vanuit dat het vlakdeel T₁T₂'T₂ buiten de contour C geen rol speelt, maar het is echter de vraag of dat wel gewettigd is.

Een geniaal inzicht: de belangrijke, maar onzichtbare, rol van de poolarm PS

Opmerkelijk is dat formule (4) niet de lengte van de poolarm PS bevat, maar alleen de lengte van de tastarm ST^4 . Kennelijk zouden we de poolarm PS helemaal buiten beschouwing kunnen laten! We zien dat ook gesuggereerd in fig. 4 met de originele tekening van Amsler: de poolarm PS is daar als een onbetekenend lijntje naar beneden getekend, terwijl de pool P daar geheel afwezig is. Toch oefent die poolarm PS een essentiële functie uit.

Tegen de verklaring in de vorige paragraaf zijn wiskundige bezwaren aan te voeren (alleen lineaire benaderingen), maar hij heeft het voordeel dat hij direct verwijst naar de fundamentele redenering die Amsler zelf ook volgde. Zie nogmaals zijn artikel [1], en ook de commentariërende artikelen [7] en [8]. Kennelijk zijn die bezwaren niet doorslaggevend, want het uiteindelijke resultaat blijkt correct te zijn.

Het geniale inzicht van Amsler is dat je een oppervlakte van een vlakke figuur, op een schaalfactor na, *exact* kunt bepalen door middel van het *doorzwaaien* van het gebied R, waarvan de oppervlakte A_R moet worden bepaald, met *één lijnstuk van constante lengte* (i.c. de tastarm ST), waarvan de bovenstaande uiterst eenvoudige formule (4) uiting is. Wie de werking van voorlopers van de poolplanimeter van Amsler bestudeert, zoals de (benaderende) vlakberekeningsmachine van Zobel & Müller, de kegelplanimeter van Hermann (1814), de kegelplanimeter van Oppikofer (1827) of het ontwerp van Maxwell (1855), die allemaal mechanisch en mathematisch veel ingewikkelder zijn dan de poolplanimeter, kan niet anders dan onder de indruk zijn van dat geniale inzicht van Amsler. En je vraagt je af hoe hij op dat idee is gekomen.

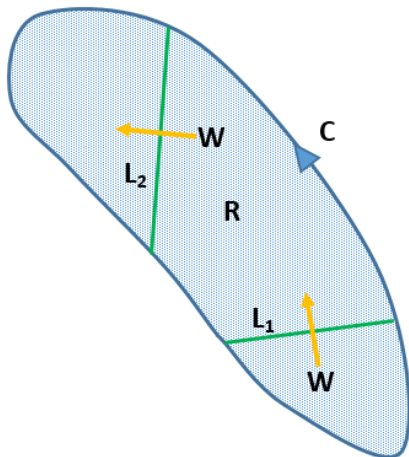


Fig. 9. Een vlak gebied R opgebouwd uit lijnstukken.

Een inzicht gevende beschrijving van het idee dat Amsler effectueerde in zijn poolplanimeter vinden we in [15, blz. 134 – 137]. Amsler kwam op het idee om een gebied R in het vlak opgebouwd te denken uit oneindig veel lijnstukken. Een volgend lijnstuk, op een infinitesimaal kleine afstand van een eerder bepaald lijnstuk, wordt steeds gevonden, via een *rotatie* en een *translatie* uit dat eerdere lijnstuk, zoals we dat ook in een vorige paragraaf hebben gezien. Zie ook fig. 4.2. Hierbij doet zich het probleem voor dat het gebied R op oneindig veel verschillende manieren opgebouwd kan worden gedacht uit lijnstukken, en dat die lijnstukken bovendien ook van elkaar

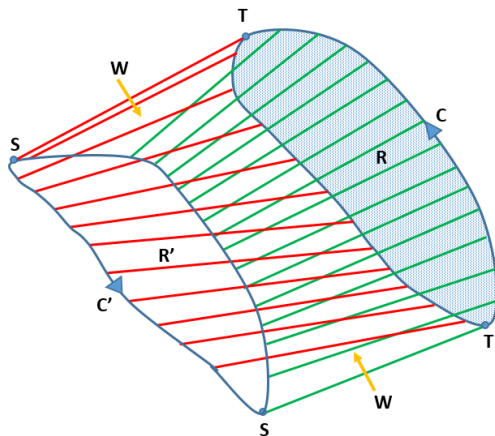
zullen verschillen in lengte. Zie bijvoorbeeld de lijnstukken L_1 en L_2 in fig. 9.

Een meetwiel W in fig. 9 zorgt voor de positieve oriëntatie als de contour C van het gebied R linksom wordt doorlopen. Van L_1 naar L_2 neemt de door W gemeten oppervlakte dus toe.

Vervolgens kwam Amsler op het idee dat ook een tastarm ST met *constante lengte* kan worden gebruikt, iets dat ook blijkt uit formule (4). Zie fig. 10. Tot nu toe hebben we ons georiënteerd op het tastpunt T van ST , maar laten we ook nu eens kijken naar het spilpunt S , het andere uiteinde van ST . De tastarm ST (groen) doorzwaait aanvankelijk R plus een gebied links van R , waarbij het tastpunt T de rechterkant

⁴ De lengte van de tastarm ST kan gewoonlijk worden ingesteld. Bij de maximale lengte $ST = ST_{\max}$ is de onnauwkeurigheid ongeveer $0,1 \text{ cm}^2$ bij schaal 1:1 en dus $0,1a^2$ bij schaal 1: a . Is $ST = b ST_{\max}$, dan volgt uit formule (4) dat het meetwiel W daardoor, bij dezelfde oppervlakte A_R , een $1/b$ maal zo grote waarde aanduidt, de onnauwkeurigheid wordt daardoor een factor b zo klein.

van de contour C volgt. De oriëntatie van de door ST doorzwaaide oppervlakte is positief. Het meetwiel W meet een toename van de oppervlakte als het groene lijnstuk van beneden naar boven beweegt.



Als de tastarm ST bovenaan de contour C is gekomen, en de linkerkant van de contour vervolgens wordt doorlopen, gaat de tastarm (nu rood getekend) naar beneden bewegen en wordt de oriëntatie van het meetwiel negatief. Het meetwiel W meet daarom een afname van de oppervlakte omdat zijn draairichting is veranderd. Hierbij wordt er voor gezorgd dat het spilpunt S een gesloten contour rond een denkbeeldig gebied R' vormt.

Fig. 10. De oppervlakte die de tastarm ST (groen van beneden naar boven (+); rood van boven naar beneden(-), doorzwaait als tastpunt T 1x de contour C linksom doorloopt. Het spilpunt S doorloopt daarbij 1x de contour C' van een denkbeeldig gebied R' . De pijltjes geven de draairichting van het meetwiel, loodrecht op ST , aan.

De zowel groen (+) als rood gearceerde oppervlakte (-) tussen het te meten gebied R en het fictieve gebied R' is 1x positief en 1x negatief gerekend door het meetwiel W . De positieve en de negatieve oppervlakte vallen tegen elkaar weg en dus vinden we de dubbel gearceerde oppervlakte niet terug op het wijzerplaatje dat verbonden is met W .

De zowel groen (+) als rood gearceerde oppervlakte (-) tussen het te meten gebied R en het fictieve gebied R' is 1x positief en 1x negatief gerekend door het meetwiel W . De positieve en de negatieve oppervlakte vallen tegen elkaar weg en dus vinden we de dubbel gearceerde oppervlakte niet terug op het wijzerplaatje dat verbonden is met W .

Gezien de groene kleur (+) van de lijnen door het gebied R , is de oppervlakte van gebied R positief gemeten; gezien de rode kleur (-) van de lijnen door het fictieve gebied R' is de oppervlakte van R' negatief gemeten; nadat de contour C is doorlopen, wijst het meetwiel W dus, op een schaalfactor na, de oppervlakte van R minus de oppervlakte van R' aan.

Men moet zich realiseren dat bovenstaande voortgang niet uniek is. Er zijn ontelbaar veel manieren te vinden om fig. 10 te construeren. Bij het gegeven gebied R liggen het fictieve gebied R' en de contour C' daarvan niet eenduidig vast. De vorm van het fictieve gebied R' kan dus vrij worden gekozen.

Amsler kwam op het briljante idee om de oppervlakte van R' gelijk aan 0 te kiezen, door voor R' , en dus ook voor C' , een cirkelboog, met als middelpunt de pool P en straal de poolarm PS , te gebruiken en het de spil S uitsluitend mogelijk te maken over die cirkelboog te bewegen. Daarmee ligt namelijk de arcering van fig. 10 wel eenduidig vast, is de oppervlakte van $R' = 0$ en levert het meetwiel W , op een schaalfactor na, de exacte oppervlakte van R , nadat daarvan de omtrek C 1x is afgetast. Voor het exact bepalen van de oppervlakte van R blijkt niet meer nodig te zijn dan het geknikte armstelsel PST!

Het vectoriële meetprincipe van de poolplanimeter

Wie op zoek gaat naar de wiskundige verklaringen van de werking van de poolplanimeter van Amsler, vindt in verreweg de meeste gevallen een verklaring met behulp van de stelling van Green voor het vlak. De hierboven gegeven verklaring met 'klassieke' meetkunde heeft iets moeizaams en het geniale, intuïtieve idee van Amsler lijkt wel naar de achtergrond verschoven te zijn, zodat het aanvankelijk moeilijk te doorgronden is waarom de poolplanimeter werkt zoals hij werkt. De vectoriële verklaring met de stelling van Green voor het vlak is analytisch aanzienlijk eleganter, maar mist helaas eveneens het hierboven beschreven intuïtieve inzicht in de werking van de poolplanimeter, dat Amsler had.

We introduceren coördinaten en vectoren volgens fig. 11. Men kiest de *pool* $P = (0,0)$ zodanig dat het *gebied* R tussen een kleine cirkel met straal $PS - ST$ en een grote cirkel met straal $PS + ST$ ligt. De spil is in coördinaten $S = (a,b)$.

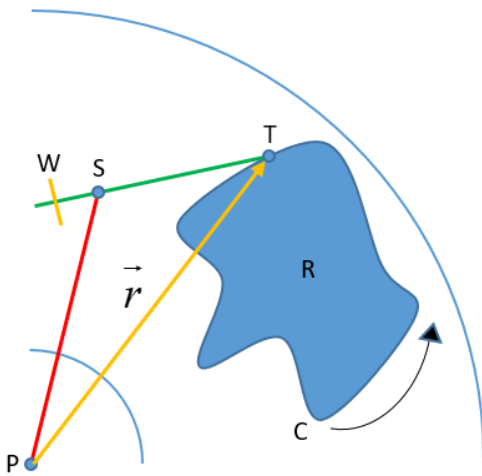


Fig. 11. Vanuit de *pool* $P = (0,0)$ vertrekt de om *pool* P draaibare *poolarm* PS . Vanuit het *spilpunt* $S = (a,b)$ vertrekt de om S draaibare *tastarm* ST . Het *gebied* R wordt ingesloten door de *curve* C , die - linksom - wordt afgetast door het *tastpunt* $T = (x,y)$, enerzijds eindpunt van de *tastarm* ST en anderzijds het eindpunt van de *radiusvector* \vec{r} vanuit de *pool*. Loodrecht op de *tastarm* is een *meetwiel* W (geel) aangebracht, hier links van S .

Fig. 12 toont een willekeurig gekozen *tastpunt* $T = (x,y)$ op *curve* C . Tevens, rakend aan C in T , de *tangentiële eenheidsvector* \vec{T} en, loodrecht op de *tastarm* ST , de *normaalvector* \vec{N} , met lengte 1. Omdat het *meetwiel* W uitsluitend loodrecht op de *tastarm* ST kan roteren, is de projectie van de vector \vec{T} op de vector \vec{N} , dus het inwendig product $\vec{N} \cdot \vec{T}$, bepalend voor de afstand die W aflegt. Zie fig.12. Als T een infinitesimaal kleine afstand ds aflegt, is de afstand die het *meetwiel* W (loodrecht op ST) aflegt dus:

W uitsluitend loodrecht op de *tastarm* ST kan roteren, is de projectie van de vector \vec{T} op de vector \vec{N} , dus het inwendig product $\vec{N} \cdot \vec{T}$, bepalend voor de afstand die W aflegt. Zie fig.12. Als T een infinitesimaal kleine afstand ds aflegt, is de afstand die het *meetwiel* W (loodrecht op ST) aflegt dus:

$$\vec{N} \cdot \vec{T} ds = \vec{N} \cdot d\vec{r} \quad (5)$$

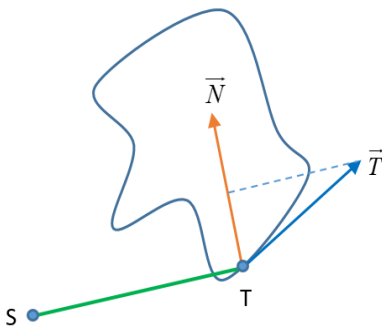


Fig. 12. De *tangentiële eenheidsvector* \vec{T} raakt in het *tastpunt* $T = (x,y)$ aan de *curve* C . De *eenheidsvector* \vec{N} staat in punt T loodrecht op de *tastarm* ST . De projectie van \vec{T} op \vec{N} is bepalend voor de afstand die het *meetwiel* W aflegt bij het doorlopen van de *curve* C .

Als het *tastpunt* T één maal de *curve* C doorloopt, zal het *meetwiel* W een *curve* C_w doorlopen met lengte:

$$\oint_{C_w} \vec{N} \cdot \vec{T} ds = \oint_{C_w} \vec{N} \cdot d\vec{r} \quad (6)$$

In fig. 11 bevindt het *meetwiel* W zich links van het *spilpunt* S op de naar links verlengde *tastarm* TS . Maar het maakt feitelijk niet uit waar op de *tastarm* het *meetwiel* W wordt aangebracht. Is namelijk w de afstand tussen S en W , dan kan de infinitesimaal kleine afstand ds in (6) worden opgedeeld in een *translatie* dl , loodrecht op de *tastarm* ST , en een afstand $w d\theta$, als gevolg van *rotatie* van ST rond het *spilpunt* S . We hebben dat idee hierboven al ontmoet, maar wordt op een iets andere manier verduidelijkt in fig. 13. De linker integraal in (6) kan dus worden opgedeeld in twee integralen:

$$\oint_{C_w} \vec{N} \cdot \vec{T} ds = \oint_{C_w} dl + \oint_{C_w} w d\theta \quad (7)$$

Green was tot zijn veertigste levensjaar (1833) nagenoeg onbekend in de academische wereld. Het meeste van zijn werk bleef zelfs nog langer onbekend. Ook Jakob Amsler-Laffon, die circa 13 jaar na de vroegtijdige dood van Green zijn planimeter construeerde, kende niet het werk van Green, dat de werking van zijn instrument vector-analytisch kan verklaren. Pas toen wetenschappers, zoals Hamilton, Maxwell, Gibbs en in het bijzonder *Oliver Heaviside* (1850 – 1925, zie [16] en zie fig. 15), in het laatste kwart van de negentiende eeuw de elektrodynamica van Faraday en Maxwell vector-analytisch gingen herformuleren, ontdekte men dat Green decennia eerder al een groot aantal begrippen en hun onderlinge relaties uit de mathematische fysica (o.a. het potentiaalbegrip) had geformuleerd zonder dat men daarvan weet had gehad. Zie [4, blz. 49 e.v. en blz. 83 e.v.].

Fig. 15. Mathematisch fysicus Oliver Heaviside, die de elektrodynamica herformuleerde in termen van de vectoranalyse. Zie [16].



In dit verband is het nog aardig om te weten dat Maxwell in de jaren 1854/1855, ook een ingewikkelde en door te verwachten mechanische problemen vermoedelijk niet erg goed werkende sferische planimeter had bedacht, maar daarvan onmiddellijk afstand deed toen hij voor het eerst de verbluffend eenvoudiger poolplanimeter van Amsler zag. Zie [4, blz. 20].

Fig. 6. James Clerk Maxwell, die de wetten van het elektromagnetisme formuleerde, waarvan de status vergelijkbaar is met die van de wetten van Newton voor de mechanica.

De *stelling van Green voor het vlak* is een bijzonder geval van de *stelling van Stokes*, één van de hoofdstellingen van de vectoranalyse, die een verband formuleert tussen de begrippen *circulatie* en cumulatieve *rotatie* van een vectorveld. Die bewuste stelling van Green luidt (in de formulering van Cauchy uit 1846 ten behoeve van de functietheorie van complexe getallen):

$$\oint_C Fdx + Gdy = \iint_R \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy \quad (10)^5$$

⁵ Opmerkelijk genoeg komt deze bekende formule (10) niet voor in het artikel van George Green uit 1828. Wat men de *stelling van Green voor het vlak* is gaan noemen, is niet door hem geformuleerd. Green was geïnteresseerd in een samenhangende formulering van het elektromagnetisme, een toentertijd nogal rommelig samenraapsel van allerlei door Oersted, Henry, Faraday en Ampère empirisch gevonden relaties tussen nog op zichzelf staande elektrische en magnetische verschijnselen. Green vond en bewees een stelling, waarvan (10), achteraf gezien, een bijzonder geval blijkt te zijn en tevens een bijzonder geval van de stelling van Stokes. Zie [14], [10, blz. 120 e.v.], en [17, blz. 100 e.v.].

(10) formuleert een relatie tussen de enkelvoudige, gesloten curve C en het gebied R, dat door C wordt ingesloten.

Hierin vormen F en G een vlak vectorveld $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix}$ op het gebied R in het (x, y) -vlak.

De integraal $\oint_C Fdx + Gdy = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$ is de *circulatie* van het vectorveld \vec{v} over de curve C.

Het verschil $\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$ van de afgeleiden van F en G (de z -component van een uitwendig product) is de

lokale rotatie van het veld \vec{v} in het gebied R en dus is $\iint_R \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy$ de cumulatieve *rotatie* van het vectorveld \vec{v} over R. Zie [10, blz. 126 e.v.].

Fig. 7. Het in 1828 door Green privé uitgegeven artikel met daarin de veel algemenere stelling, waarvan de stelling van Green voor het vlak later een bijzonder geval bleek te zijn. Zie [9]. Het artikel werd door 51 personen gelezen, waarvan 50 vrienden en andere kennissen die uit vriendelijkheid een exemplaar kochten, maar er vermoedelijk niets van begrepen, en één wiskundige die er ook niet veel van begreep, maar wel het mathematisch genie van Green onderkende en er enkele jaren later voor zorgde dat Green, op 40-jarige leeftijd (sic), aan de universiteit van Cambridge kon gaan studeren. Helaas overleed Green al enkele jaren later.

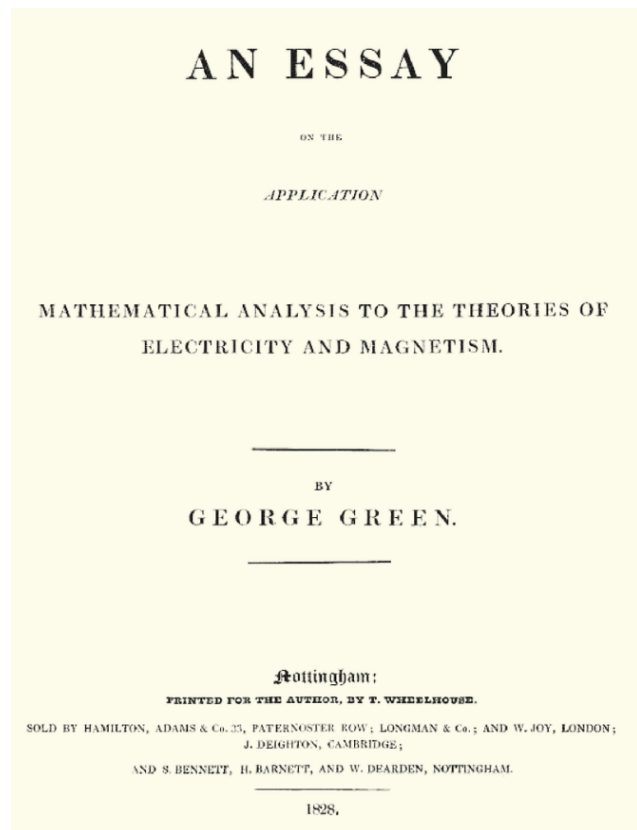
Bron: [https://en.wikipedia.org/wiki/George_Green_\(mathematician\)](https://en.wikipedia.org/wiki/George_Green_(mathematician))

Varianten van het bewijs, met behulp van de stelling van Green voor het vlak, dat de poolplanimeter van Amsler daadwerkelijk op een schaalfactor na, *exact*, de oppervlakte van het gebied R meet, vindt men bijvoorbeeld in [11] en [12]. Een zeer uitgebreide analyse van allerlei wiskundige aspecten van planimeters vindt men in [13].

Men gaat als volgt te werk.

Het spilpunt is $S = (a, b)$; het tastpunt is $T = (x, y)$. Voor de normaalvector \vec{N} , met lengte 1, *loodrecht* op de tastarm ST, zie fig. 12, geldt:

$$\vec{N} = \frac{1}{ST} \begin{pmatrix} b - y \\ x - a \end{pmatrix} \quad (11)$$



Zodat:
$$\oint_C \vec{N} \cdot \vec{T} \, ds = \oint_C \vec{N} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{ST} \oint_C (b-y)dx + (x-a)dy \quad (12)$$

In de rechter integraal $\oint_C (b-y)dx + (x-a)dy$ is blijkbaar: $F(x, y) = b-y$ en $G(x, y) = x-a$ (13)

Hieruit volgen de afgeleiden:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 1 - \frac{\partial a}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial y} - 1 \quad (14)$$

En dus is de lokale rotatie van het door deze F en G gevormde vectorveld $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix}$ gelijk aan:

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 2 - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) \quad (15)$$

Uit fig. 3 volgen $a^2 + b^2 = PS^2$ en $(x-a)^2 + (y-b)^2 = ST^2$. Na differentiëren van deze twee vergelijkingen, vindt men de twee volgende paren vergelijkingen met ieder twee partiële afgeleiden als onbekenden:

$$\begin{cases} a \frac{\partial a}{\partial x} + b \frac{\partial b}{\partial x} = 0 & (a) \\ a \frac{\partial a}{\partial y} + b \frac{\partial b}{\partial y} = 0 & (b) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x \frac{\partial a}{\partial x} + y \frac{\partial b}{\partial x} = x-a & (c) \\ x \frac{\partial a}{\partial y} + y \frac{\partial b}{\partial y} = y-b & (d) \end{cases} \quad (16)$$

Uit de vergelijkingen (a) en (c) volgt voor de afgeleiden naar x :

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{b(x-a)}{\Delta} \\ \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{a(x-a)}{\Delta} \end{cases} \quad (17)$$

Uit de vergelijkingen (b) en (d) volgt voor de afgeleiden naar y :

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{b(y-b)}{\Delta} \\ \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{a(y-b)}{\Delta} \end{cases} \quad (18)$$

Waarbij de noemers van (17) en (18) gelijk zijn aan:

$$\Delta = ay - bx \quad (19)$$

Zodat:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1 \quad (20)$$

De lokale rotatie van het door F en G bepaalde vectorveld $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix}$ blijkt dus, volgens (15),

overal in het gebied R gelijk aan 1 te zijn:

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 2 - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) = 1 \quad (21)$$

De cumulatieve rotatie van dat vectorveld *over* het gebied R is dus identiek aan de oppervlakte van het gebied R:

$$\iint_R \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R 1 dx dy = A_R \quad (22)$$

Samenvattend kan op grond hiervan gesteld worden, dat de afstand die het meetwielletje W *loodrecht* op de tastarm aflegt, evenredig is met:

$$A_R \propto \oint_{C_w} \vec{N} \cdot \vec{T} ds \propto \oint_C \vec{N} \cdot \vec{T} ds = \oint_C \vec{N} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{ST} \iint_R 1 dx dy \quad (23)$$

Conclusies

Op een *schaalfactor* na, levert het meetwielletje *exact* de oppervlakte van het door C ingesloten gebied R. Dat volgt uit het bewijs met lineaire benaderingen en uit het vector-analytische bewijs, dat gebaseerd is op de stelling van Green voor het vlak.

Amsler kende echter niet de stelling van Green voor het vlak. De vraag, welke intuïtie dan wel leidde tot de uitvinding van de poolplanimeter hebben we beantwoord. Amsler realiseerde zich dat een oppervlak gezien kan worden als een collectie rechte lijnstukken van verschillende lengtes. Door een tastarm ST verbonden aan een poolarm PS, kan men deze collectie eenduidig beschrijven. Essentieel in het inzicht van Amsler is verder, dat uitsluitend beweging *loodrecht* op de tastarm ST bepalend is voor de oppervlakte van het door curve C ingesloten gebied R. Ook in de bovenstaande vectoriële beschrijving komt dat idee weer terug, namelijk daar in het *inwendig product* van de normaalvector \vec{N} en tangentiële raakvector \vec{T} in het tastpunt T.

Dank

Mijn dank gaat uit naar John Vossepel, zoals bekend, enthousiast verzamelaar van planimeters, die mij de internetkoppelingen [1], [7] en [8], alsmede het boek [15] stuurde.

Referenties:

1. Amsler, Jakob, *Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statische Momente und die Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter*, Vierteljahrsschrift 1/1 (1856), Naturforschenden Gesellschaft, Zürich.
2. Website: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Amsler.html>.
3. Vossepel, John, website: <https://planimetria.jimdo.com/drawing-and-calculation/swiss/amsler/>.
4. Peruzzi, G., *Maxwell, ontdekker van de samenhang van elektriciteit, magnetisme en licht*, deel 30 uit de serie Wetenschappelijk Biografieën, uitgeverij Veen, Amsterdam, 2009.
5. Website: <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-surveying-two>.
6. Baart, W.K., en Streefkerk, C., *Analyse deel 1, hogere wiskunde voor het technisch onderwijs*, 6^e druk, Stam N.V., 1967.
7. Website: <http://dingler.culture.hu-berlin.de/article/pj140/ar140073>, artikel van Amsler, 1856.

8. Website: <http://dingler.culture.hu-berlin.de/article/pj140/ar140007>, *artikel van Bouniakovski, 1856*.
9. Website: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Green.html>.
10. Lipschutz, S., Spellman, D., Spiegel, M.R., *Vector Analysis*, Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill, New York, 2009.
11. Website: http://www.math.ucsd.edu/~jeggers/Resources/planimeter_slides.pdf.
12. Website: <https://nl.wikipedia.org/wiki/Planimeter>.
13. Website: <https://tleise.people.amherst.edu/HomePage/LeisePlanimeter.pdf>.
14. Website: https://sites.math.washington.edu/~morrow/335_17/history%20of%20stokes%20thm.pdf.
15. Deutsches Museum, *200 Jahre Planimeter, Ein bayerischer Vermesser und seine geniale Idee, 1814 – 2014*.
16. Nahin, Paul J., *Oliver Heaviside, the life, work, and times of an electrical genius of the victorian age*, John Hopkins University Press, Baltimore, USA, 2002.
17. Rooney, A., *Geschichte der Physik*, Tosa-Verlag, Fränkisch-Crumbach, 2016.