

## Er zit muziek in Pythagoras

Nico Smalenburg

### Pythagorasstemming

Onlangs hoorde ik van het bestaan van de *Pythagoras Stemming*. Dit intrigeerde mij omdat hierin zowel de alfa- als de bètawetenschappen samen komen.

Ongeveer 580 voor Chr. ontwierp Pythagoras het eerste snaarinstrument, de *Monochord*. Deze monochord is een enkelsnaarinstrument met een klankkast, waarbij de snaar bevestigd is tussen twee vaste kammen. Een derde kam is beweegbaar en kan over de snaarlangte langs een schaalverdeling verschuiven.



Fig. 1. Monochord

Dit instrument werd door de oude Grieken gebruikt om toonladders mee te bepalen. Pythagoras heeft het instrument gebruikt om de *Pythagorasstemming* mee te ontwikkelen.

### Toonhoogte

De lengte van een snaar is omgekeerd evenredig met de toonhoogte. In relatie met de schaalverdeling kan de toonhoogte, en indirect de frequentie, exact worden ingesteld met de verschuifbare kam. Door bijvoorbeeld de derde kam precies in het midden van de snaarlangte te plaatsen wordt er een knoop in het midden van de snaarlangte gezet. Zodoende kan het harmonisch verband tussen twee tonen worden vastgesteld. Deze hogere harmonischen zijn in dit geval tweemaal zo hoog als de grondtoon van de hele snaar.

Bij het plaatsen van de knoop op  $2/3$  van de snaarlangte klinkt ook een hogere toon, de dominante kwint. Als de snaar  $3/2$  langer wordt gemaakt, klinkt de toon een kwint lager. Bij het plaatsen van de kam op  $3/4$  van de snaarlangte ontstaat de kwart. Als de snaar  $4/3$  langer wordt gemaakt klinkt de toon een kwart lager.

Met behulp van een monochord heeft Pythagoras de naar hem genoemde toonladder ontwikkeld. Deze wijkt echter enigszins af van de toonladder die heden ten dage wordt gebruikt. In tabel 1 is deze ontwikkeling samengevat.

Er moeten echter eerst een paar definities bekend zijn. Een kwint is een tooninterval van vier tonen, een kwart is een tooninterval van drie tonen, en een octaaf is een tooninterval van zes tonen. Uitgangspunt bij de ontwikkeling van de toonladder van Pythagoras vormt de *standaardfrequentie*, toon A.

	Tonen	E	F	G	A	B	C	D	E <sub>2</sub>
1	Berekening	1/2E	2/3C	2/3D	*	3/4E	4/3G	4/3A	3/2A
2	Resultaat	3/4	64/81	8/9	1	9/8	32/27	4/3	3/2
3	Factor	256/24	9/8	9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	
4	Freq. Hz.	330	347,7	391,1	440,0	495	521,5	586,7	660

**Tabel 1. Pythagorasstemming samengevat.**

- Op regel 1 worden eerst de tonen D en E<sub>2</sub> uit A berekend door vermenigvuldiging met 4/3, een kwart omhoog en met 3/2, een kwint omhoog 3/2. Dan wordt E uit E<sub>2</sub> bepaald (octaaf lager).
- Vervolgens wordt B uit E<sub>2</sub> (kwart omlaag) ofwel 3/4 E<sub>2</sub>, en wordt G uit D (kwint omlaag) 2/3 D bepaald. Tenslotte worden C uit G (kwart omhoog) 4/3 G, en F uit C (kwint omlaag) 2/3 C bepaald.
- In regel 2 is het resultaat voor elke toon als breuk opgenomen.
- In regel 3 staan de intervallen in breuken als verschil tussen de tonen. Hieruit blijkt dat tussen de tonen B en C en tussen E en F kleine intervallen zijn.
- Op regel 4 wordt de frequentie uitgerekend door het resultaat uit regel 2 te vermenigvuldigen met de internationale standaardfrequentie van 440 Hz van de A-toon. De *Pythagoras-toonladder* is een toonladder met zeven tonen (*diatonik*). De achtste toon begint weer opnieuw een octaaf hoger.

### De komma van Pythagoras

Er passen hier echter nog vijf andere tonen extra tussen, zodat de huidige stemming uit twaalf tonen bestaat (*chromatisch*). Hiermee is echter nog wat vreemds aan de hand. Bij de stapeling van twaalf kwinten krijg je zeven octaven  $(3/2)^{12} = 129,7$ , terwijl stapeling van zeven octaven  $2^7 = 128$  oplevert, en dat zou hetzelfde moeten zijn. Dit wordt de *komma van Pythagoras* genoemd. Dit verschil geeft problemen bij het stemmen van muziekinstrumenten. De tegenwoordige stemming bestaat uit twaalf tonen, en geeft bij het stemmen geen problemen meer.

### Toonladders en akkoorden.

Een majeure toonladder bestaat in eerste instantie uit zeven tonen. Vanuit de toon A geredeneerd zijn dat de tonen A, B, C<sub>is</sub>, D, E, F<sub>is</sub>, G<sub>is</sub>, en A. Hieruit kan de formule voor majeure toonladders worden afgeleid.

**Fig. 2. Mono- en multichord, 100 v. Chr. Fresco uit woning Pompei, museum Napels.**



Met die formule kunnen vervolgens toonladders vanuit verschillende grondtonen worden bepaald.

<b>Grondtoon A tot A</b>	A	A <sub>is</sub>	B	C	C <sub>is</sub>	D	D <sub>is</sub>	E	F	F <sub>is</sub>	G	G <sub>is</sub>	A
Toonladder tonen.	T	-	T	-	T	T	-	T	-	T	-	T	T
Toonladder trappen	1		2		3	4		5		6		7	8
Majeur toonladder	A		B		C <sub>is</sub>	D		E		F <sub>is</sub>		C <sub>is</sub>	A
M akkoord trappen	1				3			5					
M akkoord	A				C <sub>is</sub>			E					
m akkoord trappen	1			b3				5					
m akkoord	A			b3				E					
6 akkoord trappen	1				3			5		6			
6 akkoord	A				C <sub>is</sub>			E		F <sub>is</sub>			
7 akkoord trappen	1				3			5			b7		
7 akkoord	A				C <sub>is</sub>			E			G		
m7 akkoord trappen	1			b3				5			b7		
m7 akkoord	A			C				E			G		
#7 akkoord trappen	1				3			5				7	
# 7 akkoord	A				C <sub>is</sub>			E				G <sub>is</sub>	
<b>Grondtoon C tot C</b>	C	C <sub>is</sub>	D	D <sub>is</sub>	E	F	F <sub>is</sub>	G	G <sub>is</sub>	A	A <sub>is</sub>	B	C
Toonladder tonen	C		D		E	F		G		A		B	C
M akkoord trappen	1				3			5					
M akkoord	C				E			G					
m akkoord trappen	1			b3				5					
m akkoord	C			b3				G					
6 akkoord trappen	1				3			5		6			
6 akkoord	C				E			G		A			
7 akkoord trappen	1				3			5			b7		
7 akkoord	C				E			G			A <sub>is</sub>		
m7 akkoord trappen	1			b3				5			b7		
m7 akkoord	C			D <sub>is</sub>				G			A <sub>is</sub>		
#7 akkoord trappen	1				3			5				7	
#7 akkoord	C				E			G				D <sub>is</sub>	
<b>Grondtoon E tot E</b>	E	F	F <sub>is</sub>	G	G <sub>is</sub>	A	A <sub>is</sub>	B	C	C <sub>is</sub>	D	D <sub>is</sub>	E
Toonladder tonen	E		F <sub>is</sub>		G <sub>is</sub>	A		B		C <sub>is</sub>		D <sub>is</sub>	E
M akkoord trappen	1				3			5					
M akkoord	E				G <sub>is</sub>			B					
m akkoord trappen	1			b3				5					
m akkoord	E			G				B					
6 akkoord trappen	1				3			5		6			
6 akkoord	E				G <sub>is</sub>			B		C <sub>is</sub>			
7 akkoord trappen	1				3			5			b7		
7 akkoord	E				G <sub>is</sub>			B			D		
m7 akkoord trappen	1			b3				5			b7		
m7 akkoord	E			G				B			D		
#7 akkoord trappen	1				3			5				7	
# 7 akkoord	E				G <sub>is</sub>			B				D <sub>is</sub>	

**Tabel 2: Diverse toonladders en daarmee in harmonie zijnde akkoorden.**

Tevens is de formule voor majeure- en mineur-akkoorden gegeven waarbij sprake is van een harmonische drieklank. Dat kan eventueel tot een vierklank (met de 7<sup>e</sup> trap) worden uitgebreid.

In tabel 2 is een en ander in beeld gebracht. Zo zijn er ook toonladders en akkoorden te construeren met de grondtonen B, D, F, en G.

### **De Musigraph 100 (Zie de bijlage op bladzijde 28)**

De Pythagorasstemming maakte mij nieuwsgierig of er niet specifieke rekenlinialen zijn ontwikkeld voor toepassing in de muziek. Via de site van David heb ik er een gevonden. Het is de in Amerika ontwikkelde *Musigraph 100*. Op de voorkant staat de naam Musigraph 100. Op de achterkant staan o.a. de verschillende klankkleuren vermeld. De rekenliniaal bestaat uit een tong die tussen twee vaste zijkanten beweegt. Op basis van toonladders en akkoorden in tabel 2, heb ik gepoogd de werking van deze Musigraph te doorgronden.

### **Plaatsing van de tabellen en rijen op voorkant. (Zie bijlage Multigraph 100 rekenliniaal).**

- *Transpositie rij*: Op de boven zijkant van de liniaal, is de bovenste transpositie rij lopend van Gbb tot Ax. Dezelfde rij op de bovenrand van de tong, is de onderste transpositie rij.
- *Hulprij*: De rij links op de onderrand van de tong, is identiek (behalve in functie) aan de beide reeds vermelde transpositie rijen.
- *Basis intervaltabel*: De tabel op de onder zijkant van de liniaal loopt van 004 tot ++5.
- *Verhoudingen trillingsfrequenties*: De kleine boven elkaar geplaatste cijfers onder de intervallen 07 tot +2 op de basis intervaltabel.
- *Harmonische intervaltabel*: De tabel rechts van de basis intervaltabel, loopt van 07 tot #6.
- Het dubbele pijltjes teken direct boven de 1 op de harmonische intervaltabel wanneer de tong in de *rustpositie* staat, heeft geen speciale functie.
- *Harmonische brontabel*: De tabel met Romeinse cijfers en akkoordsymbolen op de onder zijkant van de Musigraph.
- *Instrumenten indexrijen*: De twee identieke rijen - A t/m Ab - uiterst rechts op de bovenste zijkant, en rechtsboven op de tong, voorzien van het label *instrumenten* zijn respectievelijk de bovenste en onderste instrumentenrij.
- *Grafiek van de boventoonreeks*: Op de bovenste zijkant, de grafiek van oplopende getallen tussen de bovenste instrumentenrij en de bovenste transpositierij.
- *Relatie & Functie tabel*: De tabel met Romeinse cijfers en functiesymbolen tussen de onderste transpositierij en de onderste instrument indexrij.
- = tekens: deze worden uitgelegd in het instructiedeel.
- *Muzieksleutel tabellen*: Zie het desbetreffende instructiedeel.

### **Plaatsing van tabellen en rijen (achterkant).**

- *Schaal/Modustabellen*: De negen tabellen op de bovenste zijkant.
- *Schaalreferentierijen*: de drie identieke rijen, Fb t/m B# onder de schaal/modus tabellen.
- *Modulatiemiddelen tabel*: Die loopt van " # IV in " tot " bli in "langs de onderrand van de tong.
- *Harmonisatietabel*: Tabel rechts van de modulatiemiddelen tabel, van " #5 on" tot " o7 on ".
- *Modulatie harmonisatie rij*: Gbb - Ax op de onder zijkant.
- *Harmonie referentie rij*: De rij Fb t/m B# langs de rechter onderrand van de tong.
- *Harmonie ref. tabel*: De tabellen IV tot VII (majeur) en bVI tot VII (mineur) op de onder zijkant.

In de diverse toonrijen en -tabellen staat het symbool "b" (bes) voor verlagen, en bb (flat) voor dubbel verlagen. "#" voor verhogen, en "x" voor dubbel verhogen.

Bij het spelen van toonladders en modi kan de volgende aanwijzing worden gevolgd. Lees naar rechts om een toon te verhogen en naar links om een toon te verlagen. Dus: bb – b – neutraal – # – x.

### Voorbeelden

- Bb als hij verhoogd wordt, wordt B en als Bb verlaagd wordt Bbb.
- F# wordt na verhoging Fx, en als F # verlaagd wordt F neutraal.

Symbolen gebruikt in relaties/functietabel	Symbolen gebruikt in relaties/functietabel.
S de subdominant, in majeur en mineur.	00 = dubbel verlaagd.
D dominant, in majeur en mineur.	0 = verlaagd.
T de grondtoon, in majeur en mineur.	m = mineur.
o de verminderde-drieklank.	p = perfect (neutraal).
+ verhoogde drieklank	M = majeur.
Rs,Rd,Rt relatief majeur of mineur subdominant, dominant, grondtoon	+ = verhoogd.
rS,rD,rT relatief mineur of majeur subdominant, dominant, grondtoon	++ = dubbel verhoogd.
	b = mineur (verlaagd, flat)
	# = verhoogd (sharp)
<b>Akkoord symbolen.</b>	<b>Akkoord symbolen.</b>
M,m,o,+ = majeur, mineur, verlaagd, verhoogd.	MM,mM7 = mineur drieklank met M7 interval.
M7 = majeur 7 <sup>e</sup> akkoord.	+ M7 = + drieklank met toegevoegd M7.
7 = 7 <sup>e</sup> ook dominant 7 <sup>e</sup> akkoord genoemd.	7b5 = dominant 7 <sup>e</sup> met verlaagde 5 <sup>e</sup> .
M7 = mineur 7 <sup>e</sup> akkoord.	+ 7 = dominante 7 <sup>e</sup> met verhoogde 5 <sup>e</sup> .
Ø7 = half verlaagd (m7b5) akkoord.	o7 = dubbel verlaagd 7 <sup>e</sup> akkoord.
6 = op drieklank kunnen 6 en 9 toegevoegd.	M7b5 = M7 akkoord met verlaagde 5 <sup>e</sup> .
9 = op 7 <sup>e</sup> akkoord kan 9 <sup>e</sup> worden toegevoegd.	oM7 = o drieklank met toegevoegd M7 (M7b3b5)

### +6 akkoorden

Deze klinken onzuiver en worden aangegeven als "7" en "7b5" en op IV in mineur, "ø7", maar ze worden aangegeven met een #6 in plaats van een b7, of met andere chromatische wijzigingen.

Als je in de tabel +6 ziet staan, mag je 7 en/of 7b5-plus gebruiken, plus op IV, het ø7-akkoord. Voor schrijfwijzen enzovoorts, zie een harmonietekst.

In tabel 3, constructie – en harmonisatietabel van akkoorden staan op de x-as de toon intervallen en op de y-as de verschillende akkoordsymbolen aangegeven.

### Akkoordconstructie

In onderstaande tabel 3 worden de toon-intervallen in de akkoordsamenstellingen aangegeven met de zwarte vierkantjes, tegenover de verschillende akkoordsymbolen, terwijl de open vierkantjes de 9<sup>e</sup>, 11<sup>e</sup>, 13<sup>e</sup> toonintervallen aangeven, die eventueel kunnen worden toegevoegd.

Voor symbolen als C9, Cm9 etc. gebruik je het equivalente 7<sup>e</sup> akkoord (C7, Cm7, enzovoorts) en voeg je de 9<sup>e</sup> toe. Als #9 of b9 bedoeld is, zal het symbool dat aangeven ("7#9"). Volg dezelfde procedure met 11<sup>e</sup> en 13<sup>e</sup> akkoorden. De aanwezigheid van de 7<sup>e</sup> wordt verondersteld

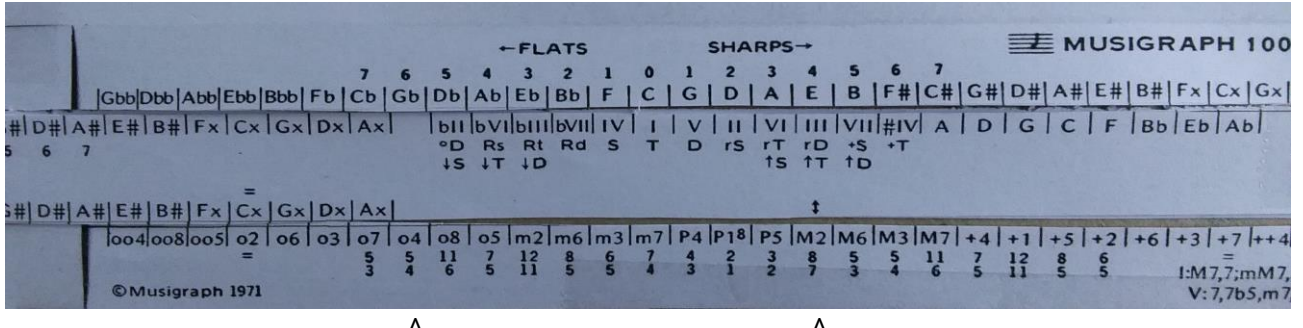




**Harmonische analyse.**

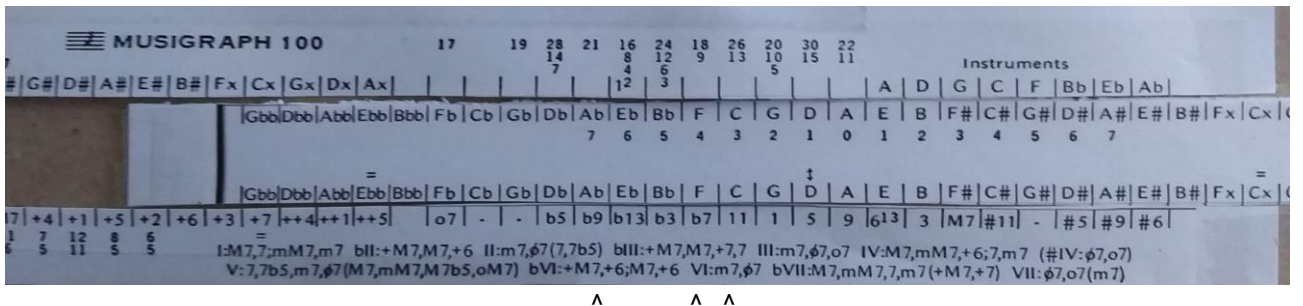
Om de Romeinse cijferaanduiding voor akkoorden te vinden, gebruik je de *Relatie en Functie Tabel*. Plaats de tonica "I" onder de toonsoortnaam. In het voorbeeld heeft de grondtoon C als "I" , G als "V" , E als "III", enzovoorts.

V V V



**Fig. D4. Relatie Functie Tabel.**

**Akkoordconstructie.**



**Fig. D5. Harmonische intervaltabel.**

Om akkoorden te construeren gebruikt u de hulplijn op de tong met toonhoogten, geplaatst boven de harmonische intervaltabel. In dit voorbeeld wordt "G" boven de "I" geplaatst, waardoor de grondtoon van het akkoord vaststaat.

Alle andere tonen worden weergegeven in hun relatie tot de grondtoon G. D is de kwint (5), Bb is de verlaagde terts (b3), enzovoorts.

Met behulp van de akkoordconstructietabel (Tabel 3) kan elk akkoord op elke grondtoon gemaakt worden. Het is in dit geval in tabel 3 het derde akkoord van boven (m), maar ook de akkoorden mM7, m7, m6 klinken hiermee harmonisch.

**Overige functies**

Grafiek boventoonreeks: plaats de tonica onder de I voor boventonen op die toonhoogte. In dit voorbeeld 2,4, 8, 16. Instrument Indexrijen: gebruikt bij het werken met verschillende muziekinstrumenten.



Het Chromatisch Pitch Instrument bevat de tonen uit de kwint cirkel gebaseerd op de grondtoon A met de internationale standaardfrequentie van 440 Hz. Hiermee kan door op bepaalde tonen te blazen, op het gehoor een muziekinstrument worden gestemd.

**Fig. 4. Chromatic Pitch Instrument.**

Met behulp van het Chromatic Pitch Instrument heb ik op het gehoor gecontroleerd of de tonen C en E uit de toonladder van de melodie, en de tonen G en B uit de majeur akkoorden samen harmonisch klinken. Dit bleek het geval, zodat theorie en praktijk goed overeenkwamen.



#### Bronnen

- Cursus muziektheorie voor beginners; G. van der Kleijn, [www.muziektheorievoorbeginners.nl](http://www.muziektheorievoorbeginners.nl)
- Guide for terminology & symbols – Musigraph 100, 1971
- Slide rule website D. Rance.
- Wikipedia.

#### Bijlage 1: zie volgende pagina

Voor en achterzijde van de Musigraph 100. Door de bladzijde met deze bijlage te kopiëren, kun je de Musigraph 100 gaan gebruiken door de tong los te knippen en een en ander op een karton te plakken. Een looper is overbodig.

