De logaritme van John Napier Simon van der Salm

(Lezing bijeenkomst KRING, Zoetermeer, 18 november 2023)

De *Descriptio*

In 1614 publiceerde de Schotse theoloog en wiskundige John Napier de *Mirifici Logarithmorum Canonis* ***Descriptio***, met een logaritmetafel voor trigonometrische grootheden. De tafel betreft opmerkelijk goede numerieke benaderingen van de *exacte Napier-logaritmen* van de Sinus, Cosinus en Tangens (hoofdletters), van hoeken in het eerste kwadrant van een cirkel met straal $R = 10^7$ eenheden, waarbij de cirkelboog verdeeld is in 90 x 60 = 5400 minuten. Zie figuur 1. De calculatiemethode die Napier gebruikte, leidde na 20 jaar rekenen tot een logaritmetafel voor trigonometrische grootheden, waarvan tabel 1 de eerste bladzijde toont.

De *Constructio*

In 1619 gaven zijn zoon Robert Napier en de Londense wiskundige Henry Briggs postuum de *Mirifici Logarithmorum Canonis* ***Constructio*** uit, met aantekeningen waarin Napier de tamelijk complexe wiskundige achtergrond van zijn berekeningsmethode verklaarde.

Die gedetailleerde beschrijving had Napier al enige jaren vóór de publicatie van de *Descriptio* samengesteld, maar nooit gepubliceerd. Zie [1], p. xvi.

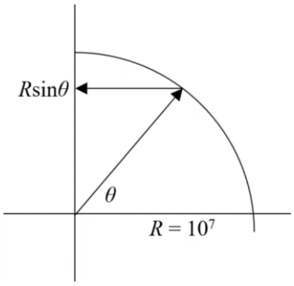


Fig. 1. De kwartcirkel van Napier. In de tijd van Napier verstond men onder de Sinus (hoofdletter) van een hoek, de hedendaagse sinus (getal tussen 0 en 1), vermenigvuldigd met de straal R van de cirkel die op dat moment relevant was. Rond 1600 vatte men trigonometrische grootheden dus niet zozeer op als verhoudingen, maar als lengten. Napier kiest de straal R gelijk aan 10^7, opdat zijn sinussen 7 significante cijfers voor de decimale komma kunnen hebben, om zo voldoende nauwkeurigheid te kunnen garanderen. Zie [1], p. 8.

Wie was John Napier?

Napier, *Ioannes Neper*, werd in 1550 geboren in het Merchiston Castle, Edinburgh, De Napiers behoorden tot de oudste Schotse adel; de stamboom van John gaat terug tot 1068. Zie [11], p. 5 e.v., en zie figuren 2 en 3. John werd geboren tijdens de Reformatie in Schotland, waar toen een hevige strijd woedde tussen Protestanten en Katholieken. Zijn familie was Protestants geworden en John was zeer religieus.

In 1563 begon hij aan een studie theologie aan de St. Andrews University, maar brak die, om onduidelijke redenen, al na een jaar af. In 1564 begon hij aan een - in die tijd avontuurlijke en gevaarlijke – reis op het vasteland van Europa. Het is onbekend wat hij daar precies zocht, maar men vermoedt dat hij onder andere in Genève theologie studeerde. Zie [11], p. 18. In 1571 kwam hij terug in Schotland, trouwde en werd landgoedeigenaar, de 8e Laird van Merchiston, bij Edinburgh.

In 1593 publiceerde hij *The Plain Discovery of the whole Revelation of Saint John*. Een belangrijke conclusie die hij trok was: "De Paus is de Antichrist". Het boek werd een groot succes in Protestants Europa. Napier beschouwde dat als zijn belangrijkste werk, en niet zijn ontdekking van een nieuw type logaritme. Wiskunde lijkt niet veel meer dan een interessante hobby voor Napier te zijn geweest.

Fig. 2. John Napier (1550 – 1617), Lord van Merchiston bij Edinburgh, Schotland. Portrait dated 1616; presented to the University of Edinburgh by his great granddaughter Margaret, who became Baroness Napier in 1686. Artist unknown. Source Wikipedia.org.

Napier overleed in 1617, nog voor de publicatie van de *Rabdologiae*, het boek over zijn rekenstaafjes. Ook postuum werd in 1619 de *Constructio* gepubliceerd, onder andere door medewerking van Briggs.

MacDonald en Havil

We reconstrueren in dit artikel de logaritmetafel in de *Descriptio* aan de hand van de nog altijd zeer leesbare Engelstalige versie van de *Constructio*, *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms*, uit 1889, een vertaling door William Rae MacDonald [1].

Bijzonder in dit verband is de biografie *John Napier, Life, Logarithms and Legacy*, door Julian Havil. Zie Havil (2014), [2]. Dat is niet alleen een historische biografie, ook Napier's wiskundige werk wordt door Havil uitvoerig en deskundig besproken. Havil baseert zich eveneens op het werk van Macdonald.

Deg. 0 +|—

mi	Sines	Logarith	Differen.	Logarith:	Sines	
0	0	Infinite.	Infinite.	.0	1000000.0	60
1	291	8142567	8142568	.1	1000000.0	59
2	582	7449419	7449421	.2	999999.8	58
3	873	7043952	7043956	.4	999999.6	57
4	1164	6756275	6756274	.7	999999.3	56
5	1454	6533131	6533130	1.1	999998.9	55
6	1745	6350810	6350808	1.6	999998.6	54
7	2036	6196659	6196657	2.2	999998.0	53
8	2327	6063128	6063126	2.8	999997.4	52
9	2618	5945345	5945342	3.5	999996.7	51
10	2909	5839986	5839814	4.3	999995.9	50
11	3280	5744676	5744671	5.2	999995.0	49
12	3491	5657665	5657658	6.2	999994.0	48
13	3781	5577622	5577615	7.3	999992.8	47
14	4072	5503514	5503506	8.4	999991.7	46
15	4363	5434522	5434513	9.6	999990.5	45
16	4654	5369984	5369973	10.9	999989.2	44
17	4945	5309360	5309348	12.3	999987.8	43
18	5236	5252202	5252188	13.8	999986.3	42
19	5527	5198136	5198120	15.4	999984.7	41
20	5818	5146843	5146836	17.0	999983.1	40
21	6109	5098054	5098045	18.7	999981.3	39
22	6399	5051534	5051514	20.5	999979.5	38
23	6690	5007083	5007060	22.4	999977.6	37
24	6981	4964524	4964499	24.4	999975.6	36
25	7272	4923703	4923676	26.5	999973.6	35
26	7563	4884483	4884454	28.7	999971.4	34
27	7854	4846743	4846712	30.9	999969.2	33
28	8145	4810376	4810343	33.2	999966.8	32
29	8436	4775286	4775250	35.0	999964.4	31
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
						Min.

Deg. 89

Deg. 0 +|—

mi	Sines	Logarith.	Differen.	Logarith.	Sines	
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
31	9017	4708596	4708555	40.7	999959.3	29
32	9308	4676848	4676805	43.4	999956.6	28
33	9599	4646077	4646031	46.1	999953.9	27
34	9890	4616225	4616176	48.9	999951.1	26
35	10181	4587239	4587187	51.8	999948.2	25
36	10472	4559069	4559014	54.8	999945.2	24
37	10763	4531671	4531613	57.9	999942.1	23
38	11054	4505004	4504943	61.1	999938.9	22
39	11344	4479030	4478965	64.4	999935.7	21
40	11635	4453713	4453645	67.7	999932.3	20
41	11926	4429022	4428950	71.1	999928.9	19
42	12217	4404925	4404850	74.6	999925.4	18
43	12508	4381396	4381318	78.2	999921.8	17
44	12799	4358408	4358326	81.9	999918.1	16
45	13090	4335936	4335850	85.7	999914.3	15
46	13380	4313958	4313868	89.6	999910.5	14
47	13671	4292453	4292360	93.5	999906.5	13
48	13962	4271401	4271304	97.5	999902.5	12
49	14253	4250783	4250682	101.6	999898.4	11
50	14544	4230583	4230477	105.8	999894.2	10
51	14835	4210781	4210671	110.1	999890.0	9
52	15126	4191364	4191250	114.5	999885.6	8
53	15416	4172317	4172198	118.9	999881.1	7
54	15707	4153627	4153504	123.4	999876.6	6
55	15998	4135279	4135151	128.0	999872.0	5
56	16289	4117263	4117130	132.7	999867.3	4
57	16580	4100664	4100527	137.5	999862.5	3
58	16871	4082175	4082032	142.4	999857.7	2
59	17162	4065082	4064935	147.3	999852.7	1
60	17452	4048276	4048124	152.3	999847.7	0
						Min.

Deg. 89

Tabel. 1. Eerste bladzijde uit de logaritmetafel van Napier uit 1614. In de linker kolom lopen de hoeken van 0°0' tot en met 0°60' = 1° van boven naar beneden. In de rechter kolom lopen de complementaire hoeken van 89°0' tot en met 89°60' = 90° van beneden naar boven. De linker Sinus-kolom lees je dus van boven naar beneden; de rechter Sinus-kolom van beneden naar boven.

Fig. 3. Merchiston Castle in 1829.

Een wiskundeboek zonder formules

Toen Napier aan het begin van de 17e eeuw zijn *Constructio* schreef was er nog geen analytische meetkunde en infinitesimaalrekening beschikbaar om zijn diepzinnige, mathematische ideeën over een continu-variabele grootheid mee uit te drukken. *La Géométrie* van Descartes verscheen pas in 1637; de differentiaal- en integraalrekening (fluxierekening, infinitesimaalrekening) heeft zijn oorsprong in een lang artikel van Leibniz in *Acta Eruditorum* uit 1664, en Newton's *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* verscheen pas in 1687.

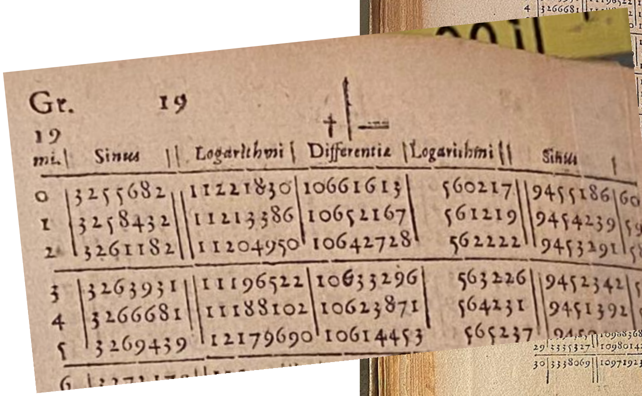
Wie de *Constructio* openslaat, ziet (zoals voor die tijd niet ongebruikelijk was) een wiskundeboek zonder formules. Wel zien we enkele tekeningen met lijnen die we tegenwoordig getallenlijnen (-assen) zouden noemen, maar die voor Napier dragers waren voor continu in lengte veranderende lijnstukken en niet van getallen. Het coördinaatbegrip was nog onbekend. Zijn wiskunde is voornamelijk Euclidisch-meetkundig van karakter. Al zijn wiskundige beschrijvingen zijn talig, wat van de hedendaagse lezer van de *Constructio* de nodige inspanning vraagt.

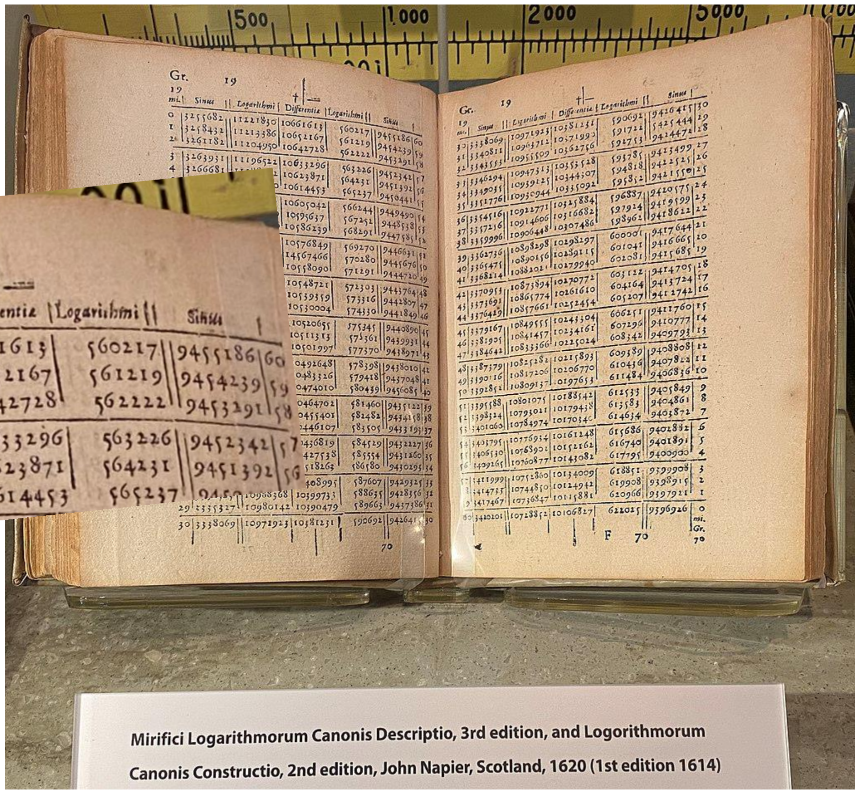
In de eerste paragraaf van de *Constructio* lezen we: "*it (= the Logarithmic Table) picked out from numbers progressing in **continuous** proportion*". Dat voor elkaar krijgen zonder de latere continuïteits-wiskunde die wij tegenwoordig gebruiken, is een bewonderingswaardige prestatie.

In dit artikel gebruiken we analytisch gereedschap dat pas ver na het leven van Napier werd ontwikkeld en dat hij niet heeft gekend, maar waarvan hij wel een intuïtief vermoeden moet hebben gehad.

Diverse logaritmetafels

Het berekenen van logaritmen, aan het einde van de 16e en het begin van de 17e eeuw, was een tour-de-force. Napier publiceerde als eerste een logaritmetafel (1614), specifiek voor trigonometrische berekeningen die veel in bijvoorbeeld de astronomie en navigatie moeten worden verricht. Zie tabel 2.





Tabel 2. Bladzijde voor een hoek van 19 graden + 0 t/m 60 minuten uit de tabel van Napier.

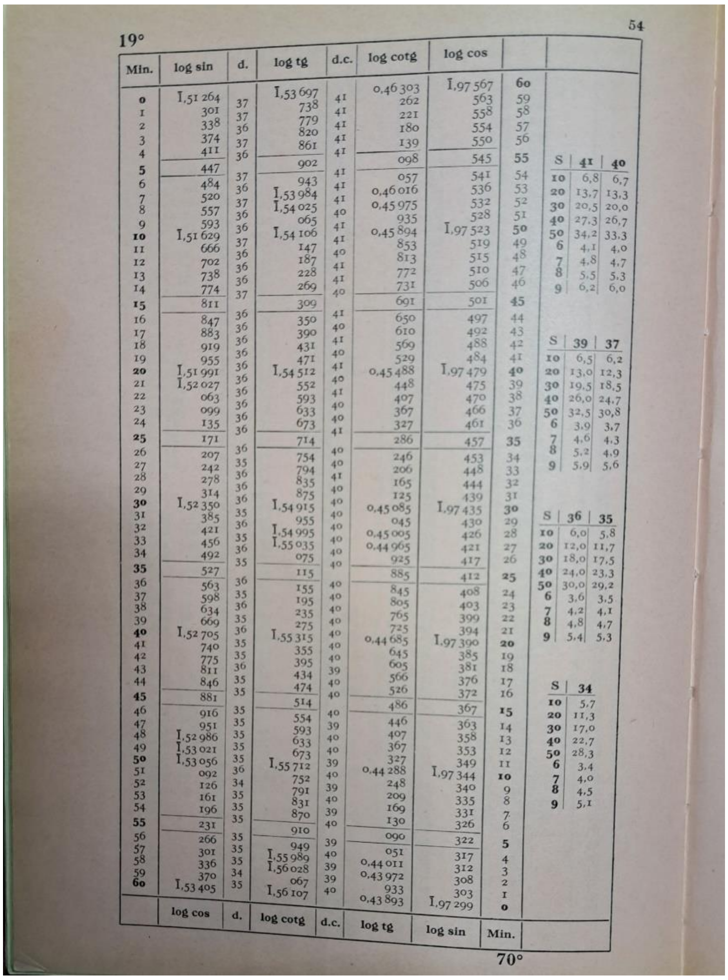
Briggs baseerde zijn algemener toepasbare (echter onvolledig gebleven) logaritmetafel op het continuïteits-idee van Napier, maar hield het na meer dan een jaar rekenen voor gezien (1617).

Ezechiël De Decker en Adriaan Vlacq

De Nederlanders *Ezechiël de Decker* (1603/1604-1646/47), landmeter en docent meetkunde en rekenkunde, en *Adriaen Vlacq* (1600-1667), astronoom, wiskundige en uitgever, maakten die tafel in circa 10 jaar af (1626/1627). Zie Van Poelje, (2005) [7] en Van der Zijden, (2000) [8].

In 1628 publiceerde Vlacq zijn *Arithmetica logarithmica*. Een internationale bestseller! Behoudens verbeteringen van rekenfouten is hun tafel 350 jaar lang de basis geweest van veel andere logaritmetafels. Merkwaardig is het daarom dat men hun (wel complete) versie altijd *Briggse* logaritmetafel is blijven noemen.

Wie de tafel van Napier openslaat voor dezelfde hoek in graden (19 graden, zoals in tabel 2), ziet dat de waarden van de logaritmen van Napier sterk verschillen van de waarden die we in modernere tafels zien. Zie tabel 3. Wat betekent dat verschil?



19° 54

Min.	log sin	d.	log tg	d.c.	log cotg	log cos	
0	$\bar{1}$,51 264	37	$\bar{1}$,53 697	41	0,46 303	$\bar{1}$,97 567	60
1	301	37	738	41	262	563	59
2	338	36	779	41	221	558	58
3	374	37	820	41	180	554	57
4	411	36	861	41	139	550	56
5	447	37	902	41	098	545	55
6	484	36	943	41	057	541	54
7	520	37	$\bar{1}$,53 984	41	0,46 016	536	53
8	557	36	$\bar{1}$,54 025	40	0,45 975	532	52
9	593	36	065	41	935	528	51
10	$\bar{1}$,51 629	37	$\bar{1}$,54 106	41	0,45 894	$\bar{1}$,97 523	50
11	666	36	147	40	853	519	49
12	702	36	187	41	813	515	48
13	738	36	228	41	772	510	47
14	774	37	269	40	731	506	46
15	811	36	309	41	691	501	45
16	847	36	350	40	650	497	44
17	883	36	390	41	610	492	43
18	919	36	431	40	569	488	42
19	955	36	471	41	529	484	41
20	$\bar{1}$,51 991	36	$\bar{1}$,54 512	40	0,45 488	$\bar{1}$,97 479	40
21	$\bar{1}$,52 027	36	552	41	448	475	39
22	063	36	593	40	407	470	38
23	099	36	633	40	367	466	37
24	135	36	673	41	327	461	36
25	171	36	714	40	286	457	35
26	207	35	754	40	246	453	34
27	242	36	794	41	206	448	33
28	278	36	835	40	165	444	32
29	314	36	875	40	125	439	31
30	$\bar{1}$,52 350	35	$\bar{1}$,54 915	40	0,45 085	$\bar{1}$,97 435	30
31	385	36	955	40	045	430	29
32	421	35	$\bar{1}$,54 995	40	0,45 005	426	28
33	456	36	$\bar{1}$,55 035	40	0,44 965	421	27
34	492	35	075	40	925	417	26
35	527	36	115	40	885	412	25
36	563	35	155	40	845	408	24
37	598	36	195	40	805	403	23
38	634	35	235	40	765	399	22
39	669	36	275	40	725	394	21
40	$\bar{1}$,52 705	35	$\bar{1}$,55 315	40	0,44 685	$\bar{1}$,97 390	20
41	740	35	355	40	645	385	19
42	775	36	395	39	605	381	18
43	811	35	434	40	566	376	17
44	846	35	474	40	526	372	16
45	881	35	514	40	486	367	15
46	916	35	554	39	446	363	14
47	951	35	593	40	407	358	13
48	$\bar{1}$,52 986	35	633	40	367	353	12
49	$\bar{1}$,53 021	35	673	39	327	349	11
50	$\bar{1}$,53 056	36	$\bar{1}$,55 712	40	0,44 288	$\bar{1}$,97 344	10
51	092	34	752	39	248	340	9
52	126	35	791	40	209	335	8
53	161	35	831	39	169	331	7
54	196	35	870	40	130	326	6
55	231	35	910	39	090	322	5
56	266	35	949	40	051	317	4
57	301	35	$\bar{1}$,55 989	39	0,44 011	312	3
58	336	34	$\bar{1}$,56 028	39	0,43 972	308	2
59	370	35	067	40	933	303	1
60	$\bar{1}$,53 405		$\bar{1}$,56 107		0,43 893	$\bar{1}$,97 299	0
	log cos	d.	log cotg	d.c.	log tg	log sin	Min.

S	41	40
10	6,8	6,7
20	13,7	13,3
30	20,5	20,0
40	27,3	26,7
50	34,2	33,3
6	4,1	4,0
7	4,8	4,7
8	5,5	5,3
9	6,2	6,0

S	39	37
10	6,5	6,2
20	13,0	12,3
30	19,5	18,5
40	26,0	24,7
50	32,5	30,8
6	3,9	3,7
7	4,6	4,3
8	5,2	4,9
9	5,9	5,6

S	36	35
10	6,0	5,8
20	12,0	11,7
30	18,0	17,5
40	24,0	23,3
50	30,0	29,2
6	3,6	3,5
7	4,2	4,1
8	4,8	4,7
9	5,4	5,3

S	34
10	5,7
20	11,3
30	17,0
40	22,7
50	28,3
6	3,4
7	4,0
8	4,5
9	5,1

70°

Tabel 3. Bladzijde voor een hoek van 19 graden uit een tabel van Noordhoff.

Een Neperiaanse logaritme?

In sommige tabellenboeken wordt de natuurlijke logaritme, de *neperiaanse logaritme* genoemd. Zie bijvoorbeeld het militaire tabellenboek [3].

Die benaming vinden we ook, zij het zeldzamer, in de elektrotechniek. Elektronici die werken met transmissielijnen, hanteren de *Neper* als alternatief voor de decibel: voor twee veldgrootheden geldt met de Briggse logaritme $D = 20\log\frac{X_1}{X_2}$ dB en met de natuurlijke logaritme $N = \ln\frac{X_1}{X_2}$ Np . De potentiaalverzwakking van een signaal in een telefoonkabel bijvoorbeeld, is een aantal Np/km. Zie [4].

Vergeleken met de dB wordt de *Neper* nauwelijks meer gebruikt. Dat is opmerkelijk omdat zoveel fenomenen in de elektrotechniek met *e*-machten beschreven worden. Zo is bijvoorbeeld het potentiaalverval langs een transmissiekabel als functie van de lengte L gelijk aan $V_L = V_{in}\exp(-\alpha L) \rightarrow \alpha L = \ln\frac{V_{in}}{V_L}$. Door de verzwakkingscoëfficiënt α in Np/km uit te drukken, vermijd je een extra rekenstap die je bij dB’s wel moet doen. We zien hier een verband tussen de natuurlijke logaritme en *Napier* maar dat is historisch merkwaardig. Napier was één van de ontdekkers van logaritmen. Hij bedacht zelfs het woord *logaritme* (= logos arithmos = ratio- of verhoudingsgetal). En Napier was de samensteller van de tweede, maar als eerste gepubliceerde, logaritmetafel. Echter, hij was zeker niet de bedenker van de natuurlijke logaritme. Die werd pas lang na zijn dood (1617) ontdekt. De Fransen noemen de natuurlijk logaritme zelfs *logarithme népérien*, een aardige, maar historisch foute benaming voor de afkorting ln. De onterechte benaming *neperiaanse* logaritme doet niettemin vermoeden dat er toch een verband moet bestaan tussen de Napier-logaritme en de natuurlijke logaritme.

Het explosieve grondtal *e*

De natuurlijke logaritme (*logarithmus naturalis*) heeft ook een grondtal, namelijk $e = 2.71828\ldots$, het transcendente grondtal van alle *exponentiële* groei, met $\ln e = 1$. Het is het grondtal dat de vijf basisconstanten van de wiskunde verenigt in de *vergelijking van Euler* $e^{i\pi} + 1 = 0$, een vergelijking die wiskundigen de mooiste uitdrukking vinden. We kunnen *e* het *explosieve grondtal* noemen: Euler introduceerde het immers in een manuscript over kanonnen, de *Meditatio in Experimenta* ***explosione*** *tormentorum nuper instituta*, geschreven in 1727/1728, meer dan 100 jaar na de dood van John Napier.

We zullen zien dat het getal e wel iets met de Napier-logaritme te maken heeft. Zonder zich dat te realiseren had Napier bijna e ontdekt, maar e is *niet* het grondtal van de Napier-logaritme.

Een logaritme zonder de logaritme-eigenschappen

De logaritme van Napier heeft zelfs niet de meest bekende eigenschappen die wij aan logaritmen toekennen. Dus het definitieregeltje, dat we allemaal op school leerden, $a^c = b \leftrightarrow \log_a b = c$, geldt niet voor de logaritme van Napier, evenals bijvoorbeeld $\log a + \log b = \log ab$. Maar de verhoudingsregel die voor Napier van fundamenteel belang was, namelijk

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow$ NapLog a - NapLog b = NapLog c - NapLog d , is wel geldig. Aan deze formule ontleende Napier de benaming logaritme, *Logos Arithmos*, verhoudingsgetal.

De logaritme van Napier: twee punten in beweging

Napier stelde zich twee lijnen voor, één met een lijnstuk OX, waarvan de lengte $x = \mathrm{Sin}\,\theta = R\sin\theta$ steeds kleiner wordt, naarmate θ kleiner wordt, en een tweede lijn met lijnstuk OL, met als lengte de (wat wij zo zullen noemen) *exacte* Napier-logaritme van x, namelijk L(x), die steeds groter wordt naarmate x kleiner wordt. Zie figuur 4. De punten X en L bewegen dus tegen elkaar in.

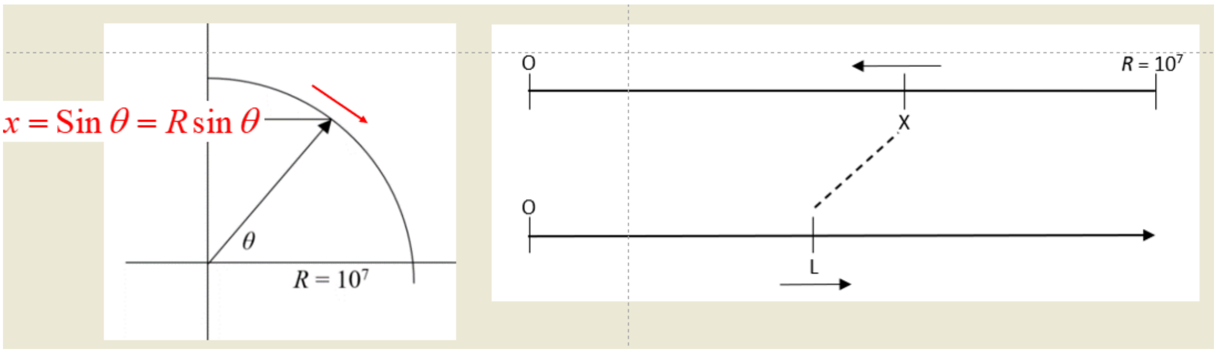


Fig. 4. Verband tussen $x = \mathrm{Sin}\,\theta = R\sin\theta$ en de exacte Napier-logaritme L.

Het continue, exacte, kinematische model levert logaritmen per boogminuut van $x = \mathrm{Sin}\,\theta = R\sin\theta$, voor hoeken $90°\,0' \geq \theta \geq 0°\,0'$ en straal $R = 10^7$. Napier zag een *continue* meetkundige rij voor zich. Wij zouden zeggen, een exponentiële functie. In de Engelse vertaling van de *Constructio* staat: “it is picked out from numbers progressing in *continuous* proportion”. Zie [1], p. 7.

Zie voor het volgende ook Van der Salm (1999) [9] en Havil (2014) [2], pp. 96 - 130.

Napier bedacht het volgende:

1) Er zijn twee lijnen waarlangs de punten X en L zich met verschillende snelheden voortbewegen.
2) Op de bovenste lijn doorloopt X het eindige interval OR met lengte $R = 10^7$; op de onderste lijn doorloopt L een halve rechte naar oneindig.
3) X start op de bovenste lijn in $x = R = 10^7$. Dat startpunt is de Sinus van 90°. Zijn beginsnelheid is $-R$ (m/s of vergelijkbare eenheid). X beweegt met *afnemende, negatieve snelheid,* in de richting van O, waarvoor $x = 0$. Als X naar links loopt, worden de hoeken θ steeds kleiner en worden dus ook de Sinussen $x = \mathrm{Sin}\,\theta = R\sin\theta$ (= lengte van OX) steeds kleiner.
4) L, met afstand L tot O, doorloopt de onderste lijn, vanaf O (L = 0), met een *constante snelheid* van $+R$ (m/s of vergelijkbare eenheid), naar $L = \infty$.

5) Hoe meer X naar links ligt, des te kleiner is x, en des te groter is de bijbehorende, *exacte* Napier-logaritme $L(x)$.

Welk verband bestaat er tussen X en L? Omdat X zich, op de positieve x-as OR, in de richting van O beweegt, is zijn snelheid negatief. Napier koos de snelheid van X gelijk aan de *negatieve* afstand $-x$. (De nogal lange uitleg van zijn motivatie hiervoor laten we hier achterwege)

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x \tag{1}$$

Op $t = 0$ is $v_x(0) = -R$ (m/s of vergelijkbare eenheid). Uit (1) volgt:

$$x = R\left(\frac{1}{e}\right)^t \tag{2}$$

De afstand x wordt kennelijk uitgedrukt (in onze moderne wiskunde) in een macht met grondtal $g = \frac{1}{e}$, vermenigvuldigd met $R = 10^7$. Formule (2) laat zien wat Napier bedoeld moet hebben met een *continue* meetkundige rij. (Wij zouden zeggen een exponentiële functie).

Formule (2) bevat nog de tijd t, die verder niet nodig is. Die kunnen we als volgt elimineren. Het verband (2) tussen t en x is ook:

$$t = \ln\frac{R}{x} \tag{3}$$

Tegelijkertijd met X start L in O op de onderste lijn met net zo grote, maar *positieve* aanvangssnelheid $R = +10^7$ (m/s of vergelijkbare eenheid). In tegenstelling tot X beweegt L met een *constante* momentane snelheid. Op het moment t heeft L daarom afgelegd de lengte:

$$L = R\,t \leftrightarrow t = \frac{L}{R} \tag{4}$$

Formules voor de Napier-logaritme

De formules van de *exacte Napier-logaritme* zijn dus:

$$\begin{cases} x(L) = R\left(\frac{1}{e}\right)^{L/R} \\ \mathrm{NapLog}(x) = L(x) = -R\ln\frac{R}{x} = R\cdot\log_{1/e}\left(\frac{x}{R}\right) \end{cases} \tag{5}$$

Het berekenen van de Napier-logaritmen aan de hand van formule (5) is met Excel een koud kunstje. Zie de tabelbladzijde in tabel 4. Het is bijna niet te geloven dat Napier dat werk met pen en op papier, zonder enig rekenhulpmiddel, produceerde, terwijl hij bovendien niet over het moderne wiskundige formularium beschikte.

Napier berekende de numerieke benaderingen van de exacte logaritmen op een geheel andere wijze, namelijk door een koppeling van een meetkundige rij en een rekenkundige rij. Zie Donners, (2002) [5]. Maar hierboven wordt wel het fundamentele idee van zijn logaritmeconstructie getoond. Dit alles is zeer verbazingwekkend, zoals blijkt uit het volgende citaat:

No previous work had led up to it, nothing had foreshadowed it or heralded its arrival. It stands isolated, breaking upon human thought abruptly, without borrowing from the works of other intellects or following known lines of mathematical thought.

Lord Moulton, tijdens de conferentie over het 400-jarige bestaan van de Logaritme van Napier, Edinburgh 1914*.

*Lynne Gladstone-Millar: *John Napier*, *Logarithm John*, (2013), [11], p. 42.

Degr	Min	Sin	Log	plus/min	Log	Sin			Min	Sin	Log	plus/min	Log	Sin	
19	0	3255682	11221835	10661617	560217	9455186	60		30	3338069	10971927	10381235	590692	9426415	30
	1	3258432	11213391	10652171	561220	9454238	59		31	3340810	10963717	10371994	591723	9425444	29
	2	3261182	11204954	10642732	562223	9453290	58		32	3343552	10955514	10362759	592755	9424471	28
	3	3263932	11196526	10633300	563227	9452341	57		33	3346293	10947318	10353531	593787	9423498	27
	4	3266681	11188106	10623875	564231	9451391	56		34	3349034	10939130	10344310	594820	9422525	26
	5	3269430	11179694	10614457	565237	9450441	55		35	3351775	10930950	10335095	595855	9421550	25
	6	3272179	11171290	10605046	566244	9449489	54		36	3354516	10922777	10325887	596890	9420575	24
	7	3274928	11162893	10595641	567252	9448537	53		37	3357256	10914612	10316685	597926	9419598	23
	8	3277676	11154505	10586244	568261	9447584	52		38	3359996	10906454	10307490	598964	9418621	22
	9	3280424	11146124	10576854	569270	9446630	51		39	3362735	10898303	10298301	600002	9417644	21
	10	3283172	11137751	10567471	570281	9445675	50		40	3365475	10890161	10289120	601041	9416665	20
	11	3285919	11129386	10558094	571292	9444720	49		41	3368214	10882025	10279944	602081	9415686	19
	12	3288666	11121029	10548724	572305	9443764	48		42	3370953	10873897	10270775	603122	9414705	18
	13	3291413	11112680	10539362	573318	9442807	47		43	3373691	10865777	10261613	604164	9413724	17
	14	3294160	11104339	10530006	574333	9441849	46		44	3376429	10857664	10252457	605207	9412743	16
	15	3296906	11096005	10520657	575348	9440890	45		45	3379167	10849558	10243307	606251	9411760	15
	16	3299653	11087679	10511315	576364	9439931	44		46	3381905	10841460	10234164	607296	9410777	14
	17	3302398	11079361	10501979	577382	9438971	43		47	3384642	10833369	10225027	608342	9409793	13
	18	3305144	11071051	10492651	578400	9438010	42		48	3387379	10825286	10215897	609389	9408808	12
	19	3307889	11062748	10483329	579419	9437048	41		49	3390116	10817210	10206773	610436	9407822	11
	20	3310634	11054453	10474014	580439	9436085	40		50	3392852	10809141	10197656	611485	9406835	10
	21	3313379	11046166	10464706	581460	9435122	39		51	3395589	10801080	10188545	612535	9405848	9
	22	3316123	11037887	10455404	582482	9434157	38		52	3398325	10793026	10179440	613585	9404860	8
	23	3318867	11029615	10446110	583505	9433192	37		53	3401060	10784979	10170342	614637	9403871	7
	24	3321611	11021351	10436822	584529	9432227	36		54	3403796	10776940	10161250	615689	9402881	6
	25	3324355	11013095	10427541	585554	9431260	35		55	3406531	10768908	10152165	616743	9401891	5
	26	3327098	11004846	10418266	586580	9430293	34		56	3409265	10760883	10143086	617797	9400899	4
	27	3329841	10996605	10408998	587606	9429324	33		57	3412000	10752865	10134013	618853	9399907	3
	28	3332584	10988371	10399737	588634	9428355	32		58	3414734	10744855	10124946	619909	9398914	2
	29	3335326	10980145	10390483	589663	9427386	31		59	3417468	10736852	10115886	620966	9397921	1
	30	3338069	10971927	10381235	590692	9426415	30		60	3420201	10728856	10106832	622025	9396926	0
							Min						**Degr**	**70**	**Min**

Tabel 4. Tabelbladzijde met Napier-logaritmen voor de hoek van 19 graden, maar nu gegenereerd met Excel.

Conclusies

- Napier was met zijn wiskundig inzicht zijn tijd ver vooruit
- Is de bedenker van de decimale punt en moderne, decimale schrijfwijze van breuken
- Gebruikte feitelijk al analytische wiskunde die meer dan een eeuw later werd gevonden
- Gebruikte slimme interpolaties om zijn logaritmen daadwerkelijk te berekenen
- De logaritme van Napier is NIET de natuurlijk log.
- De logaritme van Napier is geen logaritme in moderne betekenis.
- Veel van de gebruikelijke rekenregels zijn niet toepasbaar op de Napier-logaritme
- Napier deed 20 jaar over het rekenwerk.

Referenties

[1] Napier, John, *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms*, Alpha Edition, 2020. Reprint van de Engelse vertaling door William Rae MacDonald uit 1889, van de *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (1619/1620).
[1a] De oorspronkelijke Latijnse versie en de Engelse vertaling door MacDonald zijn op internet bij Google Books beschikbaar.
[2] Havil, J., John Napier, *Life, Logarithms and Legacy*, Princeton University Press, 2014.
[3] *Verzameling van Wiskundige Tafelen*, Koninklijke Militaire Academie, Breda, 1916.
[4] King, R.W.P., et al, *Transmission Lines, Antennas and Wave guides*, McGraw-Hill, 1945.
[5] Donners, J.H., *Mijnheer van Dalen krijgt Antwoord*, 2002.
[6] Weiss, Stephan, *Die proportionale Definition des Logarithmus*, Weiss-DefLogsProp-dt.pdf (mechrech.info).
[7] Poelje, Otto E van, *Adriaen Vlacq and Ezechiel de Decker: Dutch Contribution to the Early Tables of Briggsian Logarithms*, Journal of the Oughtred Society Vol. 14. No. 1, 2005;

[8] Zijden, Thomas van der, *Dutch Work on Logarithmic Tables by Adriaen Vlacq*, proceedings of the 6th International Meeting of Slide Rule Collectors, Ede, 2000.
[9] Salm, Simon A.M. van der, *De logaritme van Napier*, Kring Historische Rekeninstrumenten, MIR 22, mei 1999, p. 15 t/m 20.
[10] Denis Roegel, *Bürgi's Progress Tabulen (1620): logarithmic tables without logarithms.* [Research Report] 2010, inria-00543936
[11] Gladstone-Millar, L., *John Napier, Logarithm John*, National Museums of Scotland, 2013.

Websites

*1 Website https://en.wikipedia.org/wiki/Neper.
*2 https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_sector.
*3 https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier/