

Het vier vliegenprobleem analoog opgelost

Nico Smalenburg

Een rekenprobleem analoog opgelost

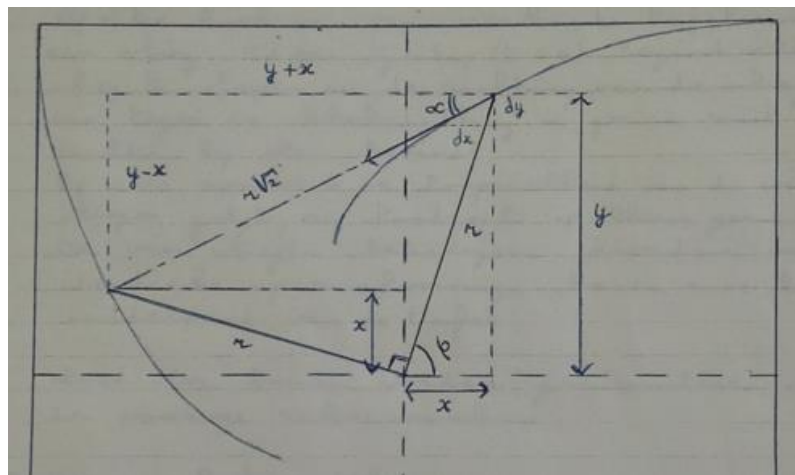
Tijdens mijn studie in Delft kreeg ik in 1979 opdracht om *het vier vliegenprobleem* op te lossen met een zelf in elkaar geknutselde, eenvoudige elektronisch-analoge rekenmachine, de *Marmot*. Het probleem wordt als volgt omschreven. Op elke hoek van een vierkante tafel zit een vlieg. Op het tijdstip $t = 0$ begint elke vlieg te lopen in de richting van de vlieg die, - tegen de klokrichting in gezien -, zich het dichtst bij hem bevindt. Op ieder moment is de loopsnelheid van de vier elkaar achtervolgende vliegen gelijk, en loodrecht op elkaar gericht. De vier vliegen beschrijven hierdoor vier identieke, logaritmischespiraalvormige banen naar het middelpunt van de tafel. Zie figuur 3 verderop. Hoe bewijs je dat? Dit *vier vliegenprobleem* kan worden gesimuleerd en opgelost met behulp van een analoge rekenmachine. Daarvoor heb je helemaal geen digitale computer nodig, zoals tegenwoordig al snel wordt gedacht.



Wiskundige analyse

De vier door te vliegen doorlopen logaritmische spiralen zijn identiek, dus de berekening hoeft maar één keer te worden uitgevoerd. We gaan uit van de vlieg die in de rechter bovenhoek van de tafel vertrekt. Zie figuur 1.

Fig. 1. Situatieschets voor de wiskundige analyse.



De richtingscoëfficiënt in het punt (x,y) van de spiraal die de vlieg volgt, is op ieder tijdstip t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-y(t) + x(t)}{-y(t) - x(t)} \quad (1)$$

Hieruit leiden we het volgende stelsel van twee simultane differentiaalvergelijkingen af:

$$\begin{cases} x' = -y - x \\ y' = -y + x \end{cases} \quad (2)$$

De elektronisch-analoge simulator

Op grond van de vergelijkingen (2) kan vervolgens een eenvoudig elektronisch simulatiemodel worden opgebouwd. In de analoge rekenmachine worden de tijdafhankelijke variabelen x en y vertegenwoordigd door elektrische spanningen in een elektronische schakeling met twee operationele versterkers, die als inverterende integrators zijn geconfigureerd. Bij een inverterende integrator staat op het *sommatiepunt* van de ingangen -1 x de afgeleide van de uitgangsspanning. Op het sommatiepunt van de bovenste integrator in figuur 2 staan de spanningen y en $-x$, dus $y' = -(y + -x) = -y + x$. Op overeenkomstige wijze vinden we voor de onderste integrator $x' = -(y + x) = -y - x$. Het uitgangssignaal x van de onderste integrator, moet dus geïnverteerd worden doorgegeven aan de bovenste integrator, wat de aanwezigheid van de inverterende versterker, met versterkingsfactor -1 , in figuur 2 motiveert.

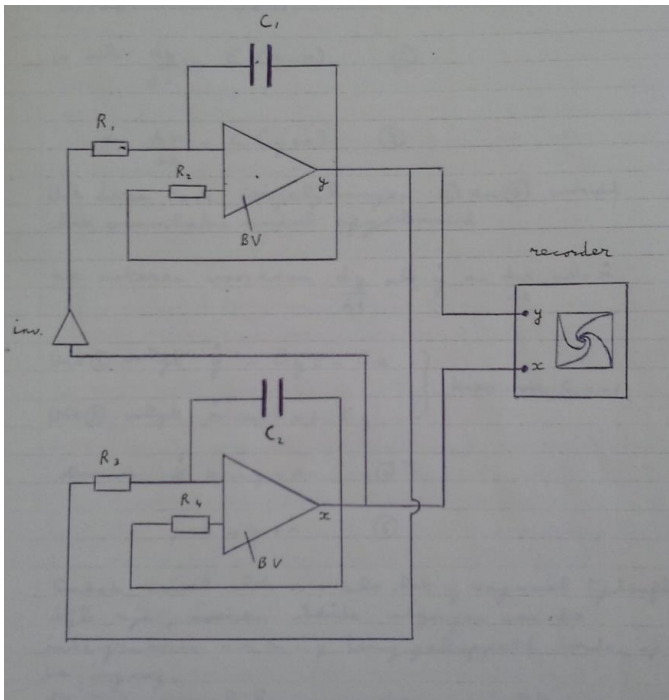


Fig. 2. Schema van de elektronische, analoge computer met twee inverterende integrators en een inverterende versterker. De componenten zijn $C_1 = C_2 = 1\mu\text{F}$; $R_1 = R_2 = 1, 10, \text{ of } 0,1 \text{ M}\Omega$; $R_3 = R_4 = 1, 10, \text{ of } 0,1 \text{ M}\Omega$. Het product van een R en een C is een tijdconstante T .

Foutenberekening

Volgens de specificaties van *De Marmot* analoge rekenmachine, bedraagt de absolute fout in de tijdbasis $0,1\%$ FS (FS = Full Scale) en is de onnauwkeurigheid ook $0,1\%$ Fs. De tolerantie van de gebruikte weerstanden is $0,25\%$ en van de gebruikte condensatoren $0,2\%$. De instelspanningen zijn gemeten met een digitale voltmeter waarvan de onnauwkeurigheid $0,2\%$ is, terwijl de a-lineariteitsfout $0,1\%$ is bij een resolutiefout van $0,1\%$ FS. De totale fout per ingang is dan

$1,05\%$, zodat de totale fout in de penpositie $1,05 \times \sqrt{2} = 1,5\%$ bedraagt.

Poolcoördinaten

Om de formules van de logaritmische spiralen te vinden, moeten de differentiaalvergelijkingen (2) nog worden vertaald naar de fysische werkelijkheid van de vier vliegen. Het blijkt handig te zijn om hiervoor, aan de hand van figuur 1, poolcoördinaten te introduceren, dus:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (3)$$

Differentiëren geeft:

$$\begin{cases} x' = r' \cos \varphi - r \varphi' \sin \varphi \\ y' = r' \sin \varphi + r \varphi' \cos \varphi \end{cases} \quad (4)$$

Hierin is r de tijdafhankelijke afstand van iedere vlieg tot het middelpunt van de tafel, en φ de bijbehorende hoek ten opzichte van de positieve richting van de x -as. De beweging van iedere vlieg kan dus gezien worden als een spiraalvormige beweging om het middelpunt van de tafel, waarbij de voorstraal

r met de tijd, en met toenemende φ , afneemt, evenals de afstand $r\sqrt{2}$ tussen twee elkaar achtervolgende vliegen. Zie figuur 1.

We veronderstellen de grootte van de snelheidsvector van alle vliegen constant v te zijn (maar niet de richting!). Daaruit volgen, voor de hoek α in figuur 1, de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x' = -v \cos \alpha = \frac{-v(x+y)}{r\sqrt{2}} \\ y' = -v \sin \alpha = \frac{-v(y-x)}{r\sqrt{2}} \end{cases} \quad (5)$$

Combineren we formules (5) met formules (3), dan vinden we:

$$\begin{cases} x' = -v \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\sqrt{2}} \\ y' = -v \frac{\sin \varphi - \cos \varphi}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (5)$$

Uit de gelijkheid van de formules (4) en (5) leiden we vervolgens af:

$$\begin{cases} -v(\cos \varphi + \sin \varphi) = \sqrt{2}(r' \cos \varphi - r\varphi' \sin \varphi) \\ -v(\sin \varphi - \cos \varphi) = \sqrt{2}(r' \sin \varphi + r\varphi' \cos \varphi) \end{cases} \quad (6)$$

Als we de bovenste vergelijking in (6) met $\cos \varphi$ vermenigvuldigen en de onderste met $\sin \varphi$, dan levert het verschil van de twee aldus ontstane vergelijkingen:

$$-v = \sqrt{2}r' \quad (7)$$

Als we daarentegen de bovenste vergelijking in (6) met $\sin \varphi$ vermenigvuldigen en de onderste met $\cos \varphi$, dan levert het verschil van de twee aldus ontstane vergelijkingen:

$$-v = -\sqrt{2}r\varphi' \quad (8)$$

Uit de identiteit van (7) en (8) volgt de eerste orde differentiaalvergelijking:

$$r' = -r\varphi' \quad (9)$$

Uit formule (9) volgt:

$$\frac{dr}{r} = -d\varphi \quad (10)$$

De oplossing van deze vergelijking is een exponentiële functie met beginwaarden r_0 en φ_0 :

$$r(\varphi) = r_0 \exp(\varphi_0 - \varphi) \quad (11)$$

φ in graden	Berekend m.b.v. (11) met φ omgerekend in radialen	$T = 10$ s	$T = 1$ s	$T = 0,1$ s
45	11,31	11,30	11,30	11,30
60	8,71	8,30	8,30	3,50
90	5,16	5,15	5,20	2,00
135	2,35	2,30	2,30	1,25
180	1,07	1,00	1,05	0,55
270	0,22	0,25	0,20	0,20
360	0,05	0,05	0,05	0,08

Tabel: Waarden van $r(\varphi)$ berekend met formule (11) en afgelezen bij drie verschillende tijdconstanten (RC-tijden).

De volgende figuren tonen de resultaten, die de x-y-schrijver produceert.

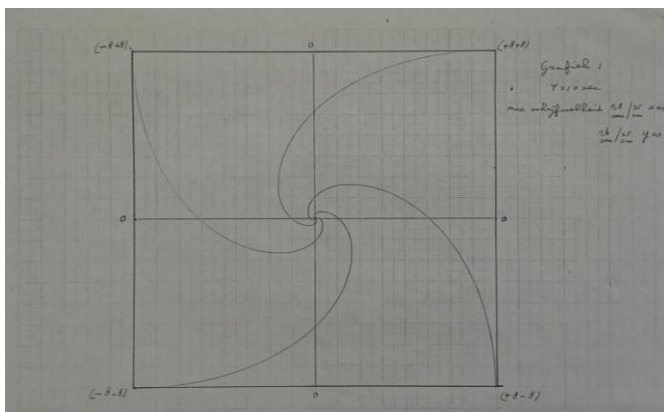


Fig. 3. De logaritmische spiralen die de vliegen volgen bij een tijdconstante $T = 10$ s.

Schrijfsnelheid 0,8 s voor 35 cm x-as en 0,6 s voor 25 cm y-as.

Fig. 4. De logaritmische spiralen die de vliegen volgen bij een tijdconstante $T = 1$ s.

Schrijfsnelheid 0,8 s voor 35 cm x-as en 0,6 s voor 25 cm y-as.

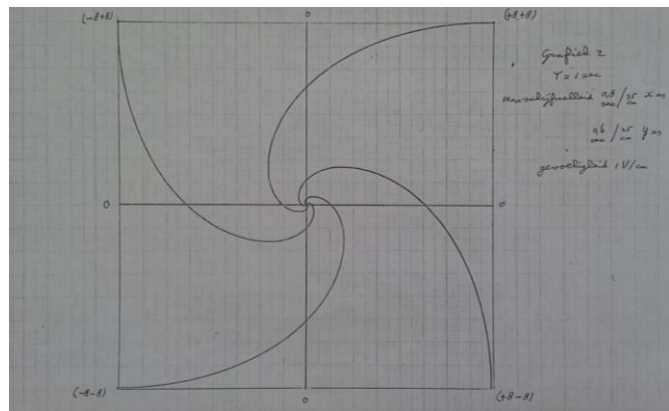
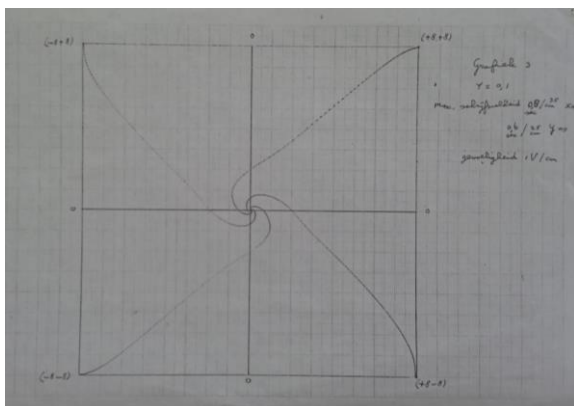


Fig. 5. De niet helemaal correcte logaritmische spiralen die de vliegen volgen bij een tijdconstante $T = 0,1$ s.

Schrijfsnelheid 0,8 s voor 35 cm x-as en 0,6 s voor 25 cm y-as.



Conclusie

De schakeling van de analoge rekenmachine is opgebouwd en getest met drie verschillende tijdconstanten (RC-tijden). Voor de tijdconstanten $T = 10$ s en $T = 1$ s, blijken de berekende waarden en de afgelezen waarden op de grafieken 1 en 2 goed met elkaar in overeenstemming.

Met de tijdconstante $T = 0,1$ s kan de schrijver het berekende resultaat niet meer goed volgen, waardoor er grotere verschillen ontstaan tussen de gemeten en de berekende waarden.

Je kunt dus met behulp van een analoge computer op verantwoorde wijze een tamelijk complex rekenprobleem simuleren en daarmee oplossen. Een groot voordeel van het gebruik van analoge rekenmachines boven digitale rekenmachines is gelegen in het feit dat je gemakkelijk verschillende parameters van het probleem kunt wijzigen, waardoor je proeven kunt doen met gesimuleerde apparaten zonder deze te hoeven aanschaffen.