

7. De kettinglijn en hyperbolische functies

Simon A.M. van der Salm

Behoeftte aan hyp-schalen

De verzamelaar die zich bezighoudt met bijzondere schalen die op rekenlinialen en -schijven voorkomen, valt het al spoedig op dat slechts weinig rekenlinialen voorzien zijn van hyperbolische schalen.

Dit is des te opmerkelijker daar tegenwoordig iedere enigszins uitgebreide elektronische rekenmachine, zoals die die op middelbare scholen worden gebruikt, voorzien is van toetsen voor hyperbolische functies en zelfs voor de inversen van deze functies.

Is de behoefte aan deze functies tegenwoordig veel groter dan vroeger of is het louter een kwestie van een gadget voor het beter doen verkopen van deze rekenapparaten? Het programmeren van een hyperbolische functie in een rekenmachine is immers relatief eenvoudig, waardoor deze functie zonder veel extra kosten aan het rekenapparaat is toe te voegen.

Een interessante feature dus, zonder veel meerwaarde? Mijn ervaring als docent is in elk geval dat slechts een enkele eerstejaars student, die net de middelbare school verlaten heeft, weet wat bijvoorbeeld een hyperbolische sinus is, ondanks het feit dat een knopje met het woord HYP, of een knopje met \sinh , prominent op zijn rekenmachine aanwezig is.

Het is jammer dat kennelijk in de wiskundelessen op middelbare scholen ook nauwelijks aandacht wordt besteed aan de meest bekende toepassing, namelijk de *kettinglijn*, die toch een fraaie alledaagse uitbeelding is van een hyperbolische functie.

Uitgaande van het geringe aantal typen rekenlinialen met hyperbolische schalen dat voor 1975 geproduceerd werd, moet je wel

tot de conclusie komen dat er niet heel veel behoefte bestond aan deze schalen.

Aristo 0971 HyperboLog;
Blundell 506 Log-Log Electro, JV 56 Multi-Log Vector Duplex;
Ding Feng 5471 Duplex Vector;
Faber-Castell Mathema;
Flying Fish 1002, 1003;
Graphoplex Neperlog Hyperbolic 691 a;
Hemmi 154, 255 Electrical Engineering, 255D, 257L en
275 Duplex Elec Eng;
Jiang Shi zonder nummer;
Keuffel & Esser 4083-3 en 4083 -5 Log-Log Duplex Vector;
Pickett & Eckel N4-ES Vector LogLog Dual Base Speed;
Sida ???, 1015, 1083;

Naar schatting is dit minder dan 1 procent van de linialen die Peter Hopp in zijn boek noemt, en vermoedelijk veel minder dan 1 procent van het totale aantal geproduceerde linialen.

Nadere bestudering laat zien dat vooral in de elektrotechniek behoefte bestond aan hyperbolische schalen op rekenlinialen, maar in dit artikel zal ik bijvoorbeeld laten zien dat er ook een interessante toepassing van een hyperbolische functie in de bouwkunde bestaat.

Zo leerde ik tijdens mijn studie elektrotechniek op de HTS, in relatie met transmissielijnen bij het vak telecommunicatie toepassingen van hyperbolische functies. De numerieke problemen die opdoken bij het berekenen

van de specifieke hyperbolische grootheden voor transmissielijnen werden gewoonlijk

Goniometrische en hyperbolische functies

De hyperbolische functies werden in 1757 geïntroduceerd door Vincenzo Riccati (1707-1775) naar aanleiding van eerdere ontdekkingen van Euler betreffende de fundamentele relatie (de formule van



Figuur 1: Een kettinglijn

Euler) tussen de goniometrische functies en e-machten.

echter niet door middel van een rekenlinaal opgelost, maar door het gebruik van speciale grafiekkarten. Deze grafiekkarten waren echter alleen geldig onder speciale randvoorwaarden, voorwaarden waaraan de schoolproblemen meestal wel voldeden.

De numerieke waarde van hyperbolische grootheden werd bovendien, zeker als een tamelijk grote nauwkeurigheid was vereist, bepaald aan de hand van tabellen die in de wat uitgebreidere tabellenboeken aan de orde kwamen.

De kettinglijn

De kettinglijn is misschien wel de meest voorkomende uiting van een hyperbolische functie. De waslijn, de ankerketting van een schip, de kabel waaraan de elektrische bovenleiding van de treinbaan hangt en de kabel waaraan een suspension bridge hangt, nemen allen de vorm van een hyperbolische cosinus aan. Zie figuur 1.

Ook de omgekeerde kettinglijn komt voor, bijvoorbeeld in de boogconstructies in gebouwen. (De boog boven deuren kan hyperbolisch zijn). De fraaiste toepassing laat de *Gateway Arch* in St. Louis, Missouri, USA zien. Deze fraaie, bijna 200 meter hoge, boogconstructie, die de poort naar het westen van de Verenigde Staten voorstelt, is een op zijn kop geplaatste hyperbolische cosinus, dus een naar boven gekeerde kettinglijn.

Zie de foto's in figuur 2.



Figuur 2: The Gateway Arch in St. Louis

Riccati ontwierp de hyperbolische functies op het complexe vlak als periodieke functies met een zuiver imaginaire periode, als tegenhangers van de bekende goniometrische functies, die een zuiver reële periode bezitten. Zie [2]. Riccati gebruikte overigens de notatie Sh en Ch voor hyperbolische sinus en -cosinus. Zie [3]. Deze Riccati-notatie vinden we gewoonlijk op rekenlinialen met hyperbolische schalen.

De theorie van de hyperbolische functies werd in 1768 verder ontwikkeld door J.H. Lambert (1728-1777), die een andere veel gebruikte notatie introduceerde, namelijk de letter h achter de gebruikelijke benamingen van de goniometrische functies. Lambert schreef dus \sinh en \cosh voor hyperbolische sinus en -cosinus. Zie [3]. Rekenmachines hanteren meestal de Lambert-notatie voor hyperbolische functies. Ook de schrijvers van leerboeken over wiskundige analyse gebruiken bij voorkeur de notatie van Lambert.

Wie een leerboek over wiskundige analyse openslaat bij het onderwerp hyperbolische functies ziet formules voor deze functies die in hoge mate overeen komen met formules voor goniometrische functies. Een drietal paren van deze formules is:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \end{cases}$$

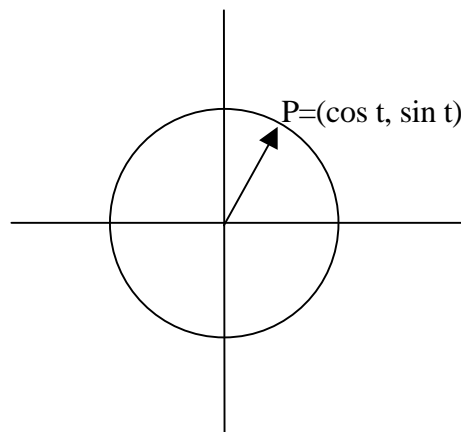
$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \end{cases}$$

De goniometrische functies, waarvan sinus en cosinus de meest prominenten zijn, worden wel met het woord *cirkelfuncties* aangeduid. Dit woord moet niet worden verward met *cyclometrische functies*, een benaming die voor de inversen van de goniometrische functies in gebruik is.

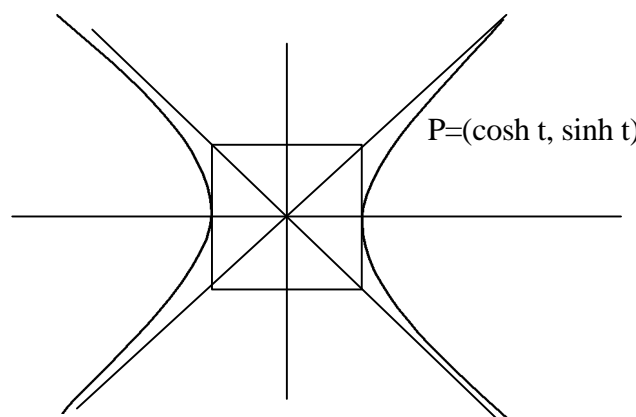
De cirkelfuncties \sin en \cos beschrijven in parametervorm de eenheids­cirkel, waarvan $x^2 + y^2 = 1$ de coördinaat­vergelijking is. Ieder punt P van de cirkel kunnen we voorstellen door de coördinaten $(\cos t, \sin t)$, waarbij we de waarde van t kunnen interpreteren als de langs de cirkel gemeten afstand van het punt $(1,0)$ tot P. Er geldt immers: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Zie figuur 3.



Figuur 3: De eenheids­cirkel

De hyperbolische functies ontleen hun naam aan het feit dat \sinh en \cosh gebruikt kunnen worden om de eenheidshyperbool met vergelijking $x^2 - y^2 = 1$ parametrisch te beschrijven. Zie figuur 4. In deze figuur zien we het vierkant door de punten $(1,0)$ en $(0,1)$ en de asymptoten met vergelijkingen $y = x$ en $y = -x$.



Figuur 4: De eenheidshyperbool

Ieder punt op de rechtertak van de hyperbool is van de gedaante $(\cosh t, \sinh t)$; ieder punt op de linkertak van de hyperbool is van de gedaante $(-\cosh t, \sinh t)$. Immers $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

De formule van Euler en periodiceit.

In de "Introductio in Analysin Infinitiorum" van 1748 publiceerde Euler zijn beroemde formule die een enorme stap verder betekende in de ontwikkeling van de theorie der complexe getallen en als de basale kern van deze theorie kan worden beschouwd.

De formule van Euler luidt:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$
$$(i = \sqrt{-1}); t \text{ reeel getal}$$

De formule van Euler laat zien dat ieder punt van de eenheidscirkel in het complexe vlak als e-macht (met imaginaire exponent) kan worden voorgesteld.

Overigens was deze formule in diverse andere gedaanten al bekend bij anderen. Zie [4].

Deze formule vormt bovendien de verbindende schakel tussen de goniometrische en hyperbolische functies. De functies in beide klassen hebben als kenmerk dat ze alle kunnen worden uitgedrukt in e-machten. Juist de gemeenschappelijke uitdrukking door middel van e-machten is de oorzaak van het fenomeen dat zoveel goniometrische en hyperbolische formules min of meer analoge gedaantes hebben.

De formule van Euler laat zien dat ieder punt van de eenheidscirkel in het complexe vlak als e-macht kan worden voorgesteld.

Uit de formule van Euler volgen de e-machtuitdrukkingen voor de sin en cos:

$$\begin{cases} \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \\ \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \end{cases}$$

Dat e^{it} periodiek is met periode 2π is begrijpelijk gezien de periodiceit van de MIR 26

sin en cos en ook gezien het feit dat deze e-macht een punt op een cirkel voorstelt.

Is nu z een complex getal $x + iy$ dan geldt:

$$e^z = e^x e^{iy}$$

De complexe e-macht is dus kennelijk een functie die in verticale richting periodiek is op het complexe vlak met periode 2π .

Riccati definieerde nu de hyperbolische basisfuncties als volgt:

$$\begin{cases} \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \end{cases}$$

Hierin is z een complex getal, maar de formules zijn ook geldig voor het geval dat z reëel is. Deze twee hyperbolische functies zijn op het complexe vlak in verticale richting periodiek met periode 2π .

Op overeenkomstige wijze laten de goniometrische basisfuncties zich uitdrukken in e-machten.

We vinden dan:

$$\begin{cases} \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{cases}$$

We zien hier nu twee functies die op het complexe vlak periodiek zijn in horizontale richting met periode 2π .

Door hun periodiceit kunnen dus ook de hyperbolische functies gebruikt worden bij het beschrijven van periodieke verschijnselen, zoals bijvoorbeeld zich voortplantende elektromagnetische golven..

De formule van de *kettinglijn* bevat de hyperbolische cosinus als als een reëelwaardige functie van de horizontale uitwijking u . Hierdoor zien we niets van de periodiceit van de cosh op het complexe vlak.

In het volgende kader wordt de afleiding van de formule van de kettinglijn getoond.

Figuur 5 toont de bijbehorende krachten in de kettinglijn.

Kettinglijnformule

$\overline{F_S}$ = spankracht

$\overline{F_V}$ = verticale component

$\overline{F_H}$ = horizontale component

$\overline{F_G}$ = gewicht koord van basipunt tot beschouwd punt

u = horizontale uitwijking

v = hoogte als functie van u

\mathbf{a} = hoek tussen spankracht en horizon

\mathbf{s} = soortelijke massa koord

l = lengte van basipunt tot beschouwd punt

g = versnelling zwaartekracht

$\overline{F_H}$ = const

$F_G = F_V = F_S \sin \mathbf{a} = \mathbf{a} l g$

$$\tan \mathbf{a} = v'(u) = \frac{F_G}{F_H} = \frac{\mathbf{s} g}{F_H} \int_0^u \sqrt{1 + (v'(u))^2} du$$

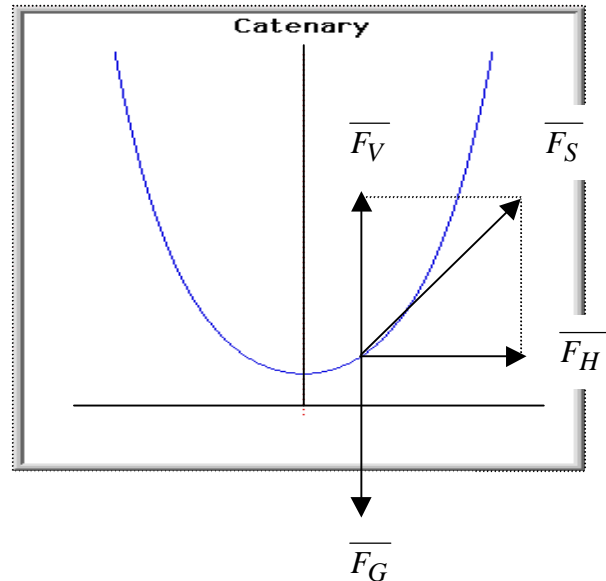
$$\text{Stel } \mathbf{a} = \frac{F_H}{\mathbf{s} g} \text{ dan } v''(u) = \frac{1}{\mathbf{a}} \sqrt{1 + (v'(u))^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v''(u)}{\sqrt{1 + (v'(u))^2}} = \frac{1}{\mathbf{a}}$$

$$\begin{cases} \text{Ar sinh}(v'(u)) = \frac{u}{\mathbf{a}} + C_1 \\ v'(0) = 0 \text{ dus } C_1 = 0 \end{cases}$$

$$v'(u) = \sinh \frac{u}{\mathbf{a}} \Rightarrow v(u) = \mathbf{a} \cosh \frac{u}{\mathbf{a}} + C_2$$

$$C_2 = 0 \Rightarrow v(u) = \mathbf{a} \cosh \frac{u}{\mathbf{a}}$$



Transmissielijnen:

een toepassing in de elektrotechniek

Als we een sinusvormig signaal aanbieden aan bijvoorbeeld een coaxiale kabel die gebruikt wordt om de TV aan te sluiten op het kastje van de kabelmaatschappij, dan ontstaan er twee golven in die kabel: een elektrische spanningsgolf en een stroomgolf. Deze twee bepalen samen de *karakteristieke impedantie* (zeg maar weerstand) van die kabel. Zie [5]

Pas op: deze impedantie is een eigenschap van de golven in de kabel en onafhankelijk van de lengte van die kabel. Een kabel met de veelgebruikte impedantie van 50 Ohm heeft deze weerstand ongeacht of de lengte 1 meter, 5 meter of 10 meter bedraagt.

Hebben we te maken met een *dissipatieloze* kabel, dat wil zeggen, zijn de energieverliezen

verwaarloosbaar, dan is de karakteristieke impedantie bij benadering:

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Hierin is L de zelfinductie per meter, en C de capaciteit per meter

Op typische elektronica-rekenlinialen, zoals bijvoorbeeld op de Sun Hemmi No. 266 "Electronics", kunnen we een schaal voor deze formule vinden.

Transmissielijnen hebben een bijzondere eigenschap: als we ze aansluiten op een apparaat (zoals de TV) waarvan deingangsimpedantie gelijk is aan Z_C , dan is deingangsimpedantie van de kabel ook gelijk aan de karakteristieke impedantie Z_C . De impedantie aan de uiteinden van de kabel wordt als het ware getransformeerd naar de impedantie tussen deingangsklemmen van de kabel.

Helaas hebben we in de praktijk niet te maken met dissipatieloze transmissiekabels en bovendien hebben we vaak te maken met andere afsluitimpedanties van de kabel. In de radiotechniek wordt een kabel vaak met een afwijkende impedantie afgesloten om speciale effecten te bewerkstelligen.

De algemene formule die deingangsimpedantie Z_i van een transmissielijn geeft als functie van de afsluitende uitgangsimpedantie Z_u , bevat een hyperbolische tangens:

$$Z_i = Z_C \frac{Z_C + Z_u \tanh \mathbf{g} s}{Z_u + Z_C \tanh \mathbf{g} s}$$

Hierin is s de lengte van de kabel en \mathbf{g} de door materiaaleigenschappen van de kabel en frequentie van het signaal bepaalde voortplantingsconstante.

Op zich ziet deze formule er niet zo ingewikkeld uit. Helaas zijn alle termen in deze formule complexe getallen, waardoor het berekenen van Z_i in het algemeen een enorm karwei is. Met de hedendaagse digitale computers is de berekening snel en nauwkeurig uit te voeren, maar voordat deze rekenapparaten gemeengoed waren, heeft bovenstaande formule voor veel ingenieurs rekenkundig geploeter betekend. De rekenliniaal zal hierbij vermoedelijk meestal gebruikt zijn voor het uitvoeren van deelberekeningen.

De ingenieur gebruikte hierbij ook diagrammen zoals het *cirkeldiagram van Smith*. Zie figuur 6. Het cirkeldiagram is in eerste instantie alleen geschikt voor dissipatieloze transmissielijnen, maar er bestaan aanpassingen die het gebruik van het cirkeldiagram ook mogelijk maakten voor dissipatieve transmissielijnen. Deze aanpassingen zijn tevens fraaie toepassingen van hyperbolische functies. Zie [5].

Referenties:

- [1] Peter Hopp: SlideRules, Their History, Models, and Makers,
- [2] E.T. Bell: The development of Mathematics, McGraw-Hill Book Company 1946,
- [3] Florian Cajori: A history of mathematical notations, Two Volumes Bound As One, Reprint 1993, Dover Publications,
- [4] D.J. Struik: Geschiedenis van de Wiskunde, SUA, Amsterdam 1977.
- [5] W.P. King, H.R. Mimno, A.H. Wing: Transmission Lines, Antennas and Wave Guides, McGraw-Hill Book Company 1945.

Zie hieronder nog het cirkeldiagram van smith

Figuur 6: Het cirkeldiagram van Smith

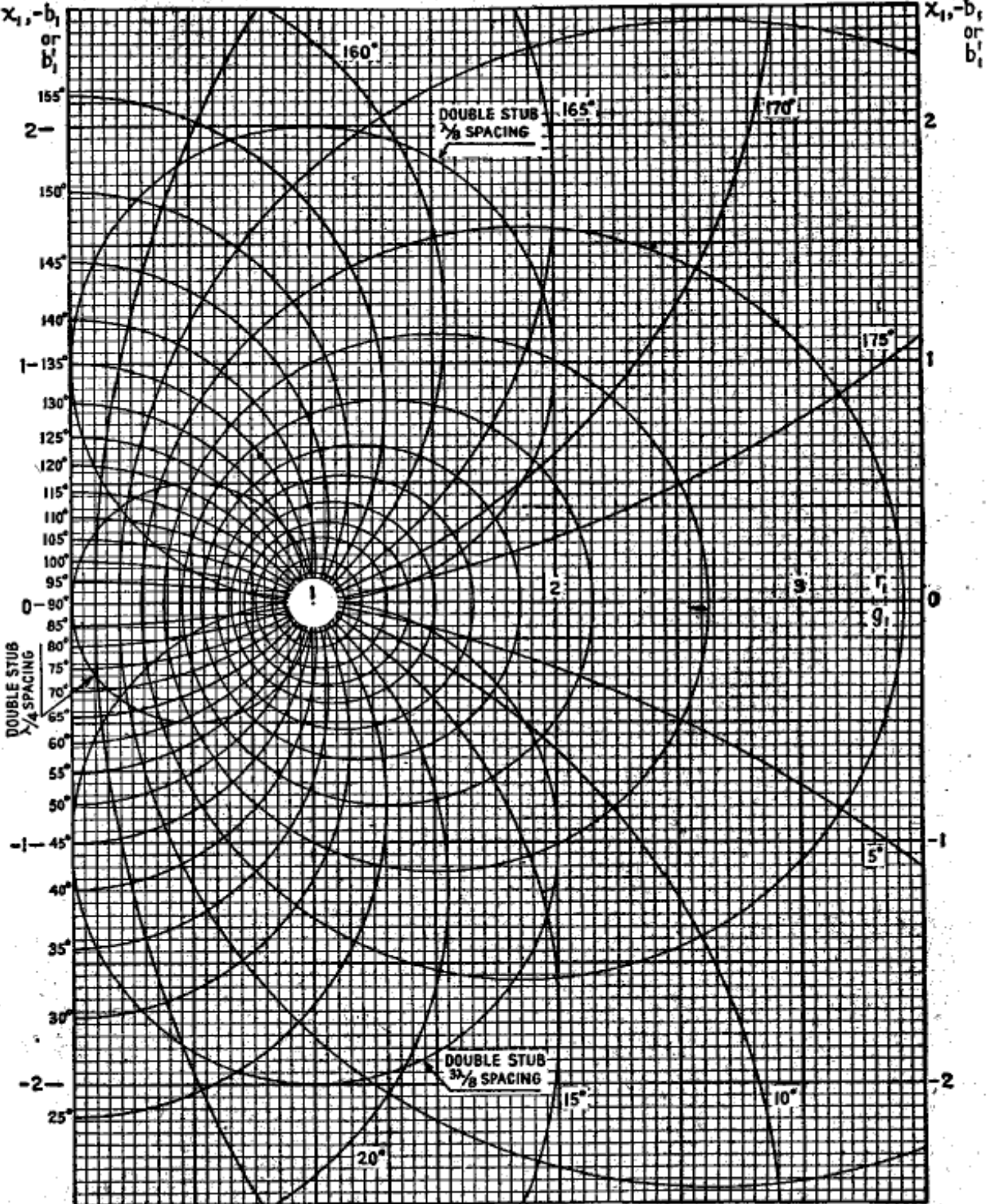


FIG. 43.1.—Circle diagram for transmission lines.

Figuur 6: Het cirkeldiagram van Smith